Геометрические вопросы теории дифференциальных уравнений. Лекция 13 мая.

14 мая 2020 г.

1 Элементарные вопросы качественной теории на плоскости.

1.1 Автономные системы.

Во многих физических задачах x задает положение некоторой системы, x' и x'' – соответственно скорость и ускорение. Закон Ньютона связывает ускорение частицы и силу, действующую на нее. Это ведет к дифференциальному уравнению

$$x'' = f(t, x, x'),$$

где t – время. Мы ограничимся рассмотрением автономных уравнений

$$x'' = f(x, x'), \tag{1}$$

в которых правая часть не зависит явно от времени. Полагая $x' = v$, получим систему, эквивалентную уравнению (1):

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = f(x, v) \end{cases} \tag{2}$$

Эта система легко сводится к уравнению первого порядка. Обе переменные x и v зависят явно от t. Если считать, что эти зависимости являются параметрической записью функции $v(x)$, найдем

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(x, v)}{v}. \tag{3}$$

Решив дифференциальное уравнение первого порядка (3), мы найдем эту функцию $v = v(x)$. Тогда зависимость $x(t)$ может быть найдена интегрированием уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v(x).$$

Решим, например, уравнение

$$x'' + x = 0.$$

Редукция к системе уравнений дает

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -x \end{cases}$$

Тогда получаем

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{x}{v},$$

откуда следует

$$xdx + vdv = 0.$$

Последнее уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Его интеграл

$$x^2 + v^2 = C^2, \qquad C = const.$$

Тогда

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{C^2 - x^2},$$

откуда следует, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C^2 - x^2}} = \int dt,$$

то есть

$$\arcsin \frac{x}{C} = t + t_0$$

или

$$x = C\sin(t + t_0).$$

Если физическая система, представленная системой (2), имеет одно или несколько положений равновесия, эти равновесные положения могут быть охарактеризованы как решения системы, для которых x является константой, то есть положения равновесия являются решениями уравнения

$$f(x, 0) = 0.$$

В окрестности таких точек уравнение (3) становится неопределенным, и требуется отдельная техника исследования.

Перейдем к общей постановке задачи. Будем рассматривать автономную систему

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases} \tag{4}$$

где штрих обозначает дифференцирование по t. Считая y функцией x, найдем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}. \tag{5}$$

Будем предполагать, что существует неподвижная точка (x_0, y_0), то есть точка, в которой обе функции f и g обращаются в ноль одновременно. Не теряя общности, будем считать, что $x_0 = 0,\ \ y_0 = 0$. Этого всегда можно добиться сдвигом системы координат в плоскости (x, y). Функции f, g мы будем считать дифференцируемыми в нуле, тогда

$$\begin{cases} f(x, y) = ax + by + \varphi(x, y), \quad \varphi \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} o(|x| + |y|), \\ g(x, y) = ax + by + \psi(x, y), \quad \psi \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} o(|x| + |y|). \end{cases} \tag{6}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

является матрицей Якоби вектор-функции $(f, g)^t$ в нуле.

Естественно считать, что поведение решений уравнений (4) и (5) похоже на поведение решений уравнений, соответственно

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases} \tag{7}$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$$

в окрестности нуля (неподвижной точки). Уравнение (7) называется линеаризацией уравнения (4). Исследуем его, записав в виде

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A находятся из уравнения

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Предположим вначале, что собственные числа различны и равны λ_1 и λ_2. Соответствующие собственные векторы обозначим через $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Обозначая матрицу, столбцами которой являются эти векторы, через T, найдем

$$A = T\Lambda T^{-1}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Замена искомой функции

$$\vec{z} = T^{-1}\vec{y}$$

ведет к системе

$$\vec{z}' = \Lambda\vec{z},$$

решения которой имеют вид

$$u = C_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad v = C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad \vec{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Предположим теперь, что собственные числа вещественны и различны. Тогда на фазовой плоскости u, v получим семейство кривых

$$v = ku^{\mu}, \qquad \mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \tag{9}$$

Для доказатеольства этого факта нужно вернуться к уравнениям (8)

$$\lambda_1 t = \ln(u/C_1), \qquad \lambda_2 t = \ln(v/C_2).$$

Поделив эти уравнения друг на друга, получим

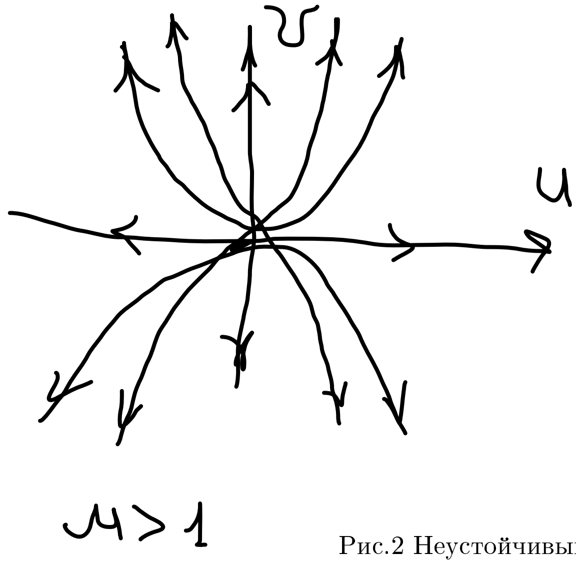
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ln(v/C_2) = \ln(u/C_1).$$

Отсюда следует, что

$$(v/C_2)^{\lambda_1/\lambda_2} = u/C_1 \quad \to \qquad v = ku^{\mu}, \qquad \mu = \lambda_2/\lambda_1.$$

■

Если оба корня λ_1 и λ_2 положительны, получится картина, представленная на Рис. 2. При этом стрелочки урказывают направление движения. Особая точка $(0,0)$ называется **неустойчивым узлом.**



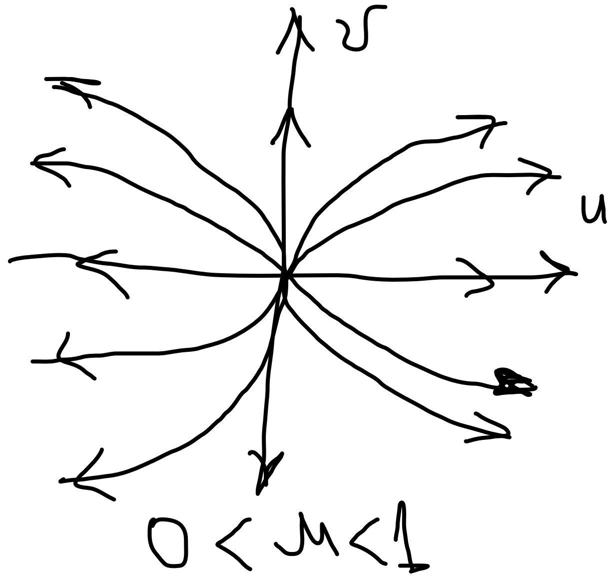


Рис.2 Неустойчивый узел

Если оба корня отрицательны, получится аналогичная картина, но направление движения изменится на противоположное. Особая точка $(0,0)$ в этом случае называется **устойчивым узлом.** Если корни разных знаков, **фазовый портрет** примет вид, например, показанный на Рис.3.

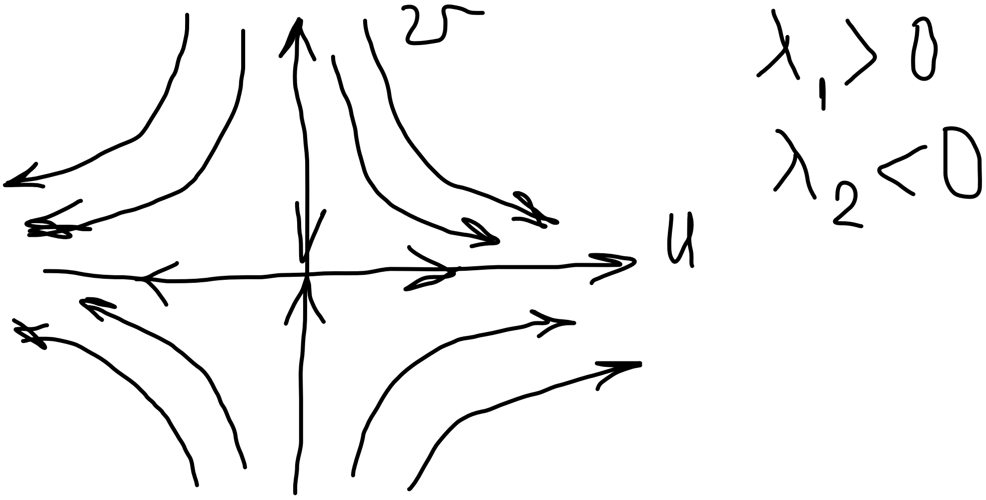


Рис.3 Седло

В этом случае особая точка $(0,0)$ называется **седлом.** Четыре траектории, входящие или выходящие из седловой точки и отделяющие друг от друга семейства траекторий типа гипербол, называются **сепаратрисами.**