Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 30.03.2020

§4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

1. Характеристический многочлен квадратной матрицы. Собственные числа квадратной матрицы.

Опр. Пусть $A \in M^{n,n}(\mathbb{K})$ — квадратная матрица. Характеристическим многочленом матрицы A называется следующая функция:

$$d_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Здесь I_n — единичная матрица размера $n \times n$.

Предложение 4.1 Для всякой матрицы $A \in M^{n,n}(\mathbb{K})$ справедливы следующие утверждения:

1) $d_A(\lambda)$ — многочлен степени n;
2) старший коэффициент характеристического многочлена $d_A(\lambda)$ равен $(-1)^n$, коэффициент при степени λ^{n-1} — $(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}A$, свободный член многочлена $d_A(\lambda)$ равен $\det A$.

Доказательство. Мы проиллюстрируем это утверждение только при $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}, \quad d_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

□

Теорема 4.2. Гаусса. Всякий многочлен (степени не ниже первой) имеет хотя бы один комплексный корень.

Доказательство. Без доказательства. □

Следствие 4.3. Всякий многочлен $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \dots + a_0$, $n \geqslant 1$, может быть представлен в виде $P(\lambda) = a_n(\lambda - \mu_1)^{\sigma_1} \dots (\lambda - \mu_p)^{\sigma_p}$, где $\mu_1, \dots, \mu_p$ — все различные корни многочлена $P(\lambda)$, $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \mathbb{N}$. При этом, описанное выше представление единственно, с точностью до перенумерации корней.

Доказательство. Без доказательства. □

Обозначение. Числа $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ называются кратностями корней $\mu_1, \dots, \mu_p$.

Замечание. Иногда нам будет удобен другой способ нумерации корней:

$$P(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n).$$

Здесь $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ — корни многочлена $P(\lambda)$, занумерованные с учетом кратностей (т.е. среди корней могут быть и одинаковые, каждый корень повторяется столько раз какова его кратность).

Опр. Пусть $A \in M^{n,n}(\mathbb{K})$ — квадратная матрица, $d_A(\lambda)$ — ее характеристический многочлен; $d_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \mu_1)^{\sigma_1} \dots (\lambda - \mu_p)^{\sigma_p}$. Тогда корни $\{\mu_k\}_{k=1}^p$ характеристического многочлена $d_A(\lambda)$ называются собственными числами матрицы A, а числа $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ называются алгебраическими кратностями собственных чисел $\mu_1, \dots, \mu_p$.

Замечание. Иногда мы будем использовать другой способ нумерации собственных чисел матрица A:

$$d_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n). \qquad (*)$$

Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A, занумерованные с учетом кратности (теперь собственные числа могут быть и одинаковыми; каждое повторяется столько раз, какова его кратность).

Свойства. Сравнивая равенство $(*)$ с предложением 4.1, получим соотношения:

1) $\mathrm{Tr}A = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$;
2) $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$;
3) $\det A = 0 \Leftrightarrow 0$ — собственное число матрицы A.

Замечание. Собственные числа матрицы могут быть комплексными, даже если матрица A — вещественная:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad d_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

2. Собственные числа, собственные векторы и собственные подпространства оператора, действующего из комплексного линейного пространства E в E. Алгебраическая и геометрическая кратности собственных чисел оператора, действующего из комплексного линейного пространства E в E.

Обратите внимание, мы впервые отдельно разбираем комплексный случай.

Опр. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathbb{A} : E \to E$ — линейный оператор. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным числом оператора $\mathbb{A}$, если уравнение $\mathbb{A}x = \lambda x$ имеет нетривиальное (ненулевое) решение. При этом всякое ненулевое решение уравнения $\mathbb{A}x = \lambda x$ называется собственным вектором оператора $\mathbb{A}$, отвечающим собственному числу λ.

Свойства.

1) $\mathbb{A}x = \lambda x \Leftrightarrow (\mathbb{A} - \lambda I)x = \mathbb{O}$;
2) x — собственный вектор оператора $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия: $x \neq \mathbb{O}$, $x \in \mathrm{Ker}(\mathbb{A} - \lambda I)$.

Опр. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathbb{A} : E \to E$ — линейный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное число оператора $\mathbb{A}$; тогда множество $\mathrm{Ker}(\mathbb{A} - \lambda I) =: F_\lambda$ называется собственным подпространством оператора $\mathbb{A}$, отвечающим собственному числу λ.

Много ли может быть собственных чисел у линейного оператора. На этот вопрос отвечает следующее утверждение.

Теорема 4.4. Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$; $\{e_k\}_{k=1}^n$ — базис в пространстве E; $\mathbb{A} : E \to E$ — линейный оператор; пусть $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ — изображает оператор $\mathbb{A}$ в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$. Тогда верно:

1) λ — собственное число оператора $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда λ — собственное число матрицы A.

2) Вектор $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ принадлежит подпространству $\mathrm{Ker}(\mathbb{A} - \lambda I)$ тогда и только тогда, когда

$$(A - \lambda I_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Доказательство. Начнем со второго утверждения теоремы. В самом деле, единичный оператор изображается единичной матрицей, а потому оператор $\mathbb{A} - \lambda I$ изображается матрицей $A - \lambda I_n$. Следовательно, для всякого $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in E$ координаты вектора $(\mathbb{A} - \lambda I)x = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k$ даются равенством

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (A - \lambda I_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Откуда и вытекает второе утверждение теоремы:

$$(\mathbb{A} - \lambda I)x = \mathbb{O} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Таким образом, уравнение $\mathbb{A}x = \lambda x$ имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда уравнение

$$(A - \lambda I_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

имеет нетривиальное решение, что эквивалентно равенству $\det(A - \lambda I_n) = 0$, означающему что λ — собственное число матрицы A. $\square$

Замечание. Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$; $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ — базисы в пространстве E; $\mathbb{A} : E \to E$ — линейный оператор; пусть $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ — изображает оператор $\mathbb{A}$ в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\tilde{A} \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ — изображает оператор $\mathbb{A}$ в паре базисов $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$, $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$. Можно показать, что характеристические многочлены матриц A и $\tilde{A}$ совпадают (а значит совпадают следы и определители матриц A и $\tilde{A}$).

Опр. Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$; $\{e_k\}_{k=1}^n$ — базис в пространстве E; $\mathbb{A} : E \to E$ — линейный оператор; пусть $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ — изображает оператор $\mathbb{A}$ в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$. Тогда характеристический многочлен $d_A(\lambda)$ матрицы A будем также называть характеристическим многочленом оператора $\mathbb{A}$ и обозначать $d_{\mathbb{A}}(\lambda)$; $\mathrm{Tr}\mathbb{A} := \mathrm{Tr}A$, $\det\mathbb{A} := \det A$.

Опр. Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathbb{A} : E \to E$ — линейный оператор, $d_{\mathbb{A}}(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \mu_1)^{\sigma_1} \ldots (\lambda - \mu_p)^{\sigma_p}$ (где $\mu_1, \ldots, \mu_p$ — все различные корни многочлена $d_{\mathbb{A}}(\lambda)$); тогда числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ — называются алгебраическими кратностями собственных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_p$ оператора $\mathbb{A}$; числа $\tau_1 = \mathrm{dimKer}(\mathbb{A} - \mu_1 I), \ldots, \tau_p = \mathrm{dimKer}(\mathbb{A} - \mu_p I)$

называются геометрическими кратностями собственных чисел $\mu_1, \dots, \mu_p$ оператора $\mathbb{A}$. Следующий набор

$$\sigma(\mathbb{A}) := \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \dots & \mu_p \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \dots & \sigma_p \\ \tau_1, & \tau_2, & \dots & \tau_p \end{pmatrix}$$

называется *спектром* оператора $\mathbb{A}$.

Сформулируем без доказательства следующий результат.

Теорема 4.5. Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathbb{A} : E \to E$ — линейный оператор,

$$\sigma(\mathbb{A}) := \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \dots & \mu_p \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \dots & \sigma_p \\ \tau_1, & \tau_2, & \dots & \tau_p \end{pmatrix}$$

— спектр оператора $\mathbb{A}$. Тогда справедливы соотношения: $1 \leqslant \tau_i \leqslant \sigma_i \leqslant \dim E$, $i = 1, \dots, p$, $\sigma_1 + \dots + \sigma_p = \dim E$.

Сформулируем теперь несколько утверждений о собственных подпространствах.

Теорема 4.6. Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathbb{A} : E \to E$ — линейный оператор,

$$\sigma(\mathbb{A}) := \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \dots & \mu_p \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \dots & \sigma_p \\ \tau_1, & \tau_2, & \dots & \tau_p \end{pmatrix}$$

— спектр оператора $\mathbb{A}$. Тогда сумма собственных подпространств $F_{\mu_1} + \dots + F_{\mu_p}$ — прямая.

Доказательство. Предположим некоторый вектор $x \in F_{\mu_1} + \dots + F_{\mu_p}$ имеет представления

$$x = f_1 + \dots + f_p = g_1 + \dots + g_p, \quad \text{где} \quad f_i, g_i \in F_{\mu_i}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Тогда справедливо равенство

$$(f_1 - g_1) + (f_2 - g_2) + (f_3 - g_3) + \dots + (f_p - g_p) = \mathbb{O}.$$

Подействуем на левую и правую части последнего соотношения оператором $\mathbb{A} - \mu_1$; учтем, что на любой вектор h_j из F_{μ_j} оператор $\mathbb{A}$ действует по формуле $\mathbb{A}h_j = \mu_j h_j$, а значит $(\mathbb{A} - \mu_1 I)h_j = (\mu_j - \mu_1)h_j$. Придем к равенству

$$(\mu_1 - \mu_1)(f_1 - g_1) + (\mu_2 - \mu_1)(f_2 - g_2) + (\mu_3 - \mu_1)(f_3 - g_3) + \dots + (\mu_p - \mu_1)(f_p - g_p) = \mathbb{O}.$$

Выбросим первое (равное нулю) слагаемое. Подействуем на полученное оператором $\mathbb{A} - \mu_2 I$ и получим

$$(\mu_3 - \mu_2)(\mu_3 - \mu_1)(f_3 - g_3) + \dots + (\mu_p - \mu_2)(\mu_p - \mu_1)(f_p - g_p) = \mathbb{O}.$$

Продолжая действовать так же, в конце концов придем к соотношению

$$(\mu_{p-1} - \mu_{p-2}) \dots (\mu_{p-1} - \mu_1)(f_{p-1} - g_{p-1}) + (\mu_p - \mu_{p-2}) \dots (\mu_p - \mu_1)(f_p - g_p) = \mathbb{O}.$$

Подействовав на это равенство оператором $\mathbb{A} - \mu_{p-1} I$ получим

$$(\mu_p - \mu_{p-1}) \dots (\mu_p - \mu_1)(f_p - g_p) = \mathbb{O},$$

откуда немедленно вытекает $f_p - g_p = \mathbb{O}$. Но тогда из предпоследнего равенства вытекает $f_{p-1} - g_{p-1} = \mathbb{O}$ и далее, рассуждая в обратном порядке, приходим к утверждению

$$f_1 - g_1 = \dots = f_p - g_p = \mathbb{O}.$$

□

Следствие 4.7. В условиях теоремы 4.6 объединение базисов подпространств $F_{\mu_1}, \ldots, F_{\mu_p}$ есть базис в прямой сумме $F_{\mu_1} \dot{+} \ldots \dot{+} F_{\mu_p}$.

3. Собственные числа, собственные векторы и собственные подпространства оператора, действующего из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$. Алгебраическая и геометрическая кратности собственных чисел оператора, действующего из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$.

В этом пункте мы применим все полученные результаты к случаю оператора, действующего из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$. Более того, для полноты изложения мы повторим большую часть определений теорем и доказательств специально для этого случая.

Опр. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным числом оператора $\mathbb{A}$, если уравнение $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ имеет нетривиальное (ненулевое) решение. При этом всякое ненулевое решение уравнения $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ называется собственным вектором оператора $\mathbb{A}$, отвечающим собственному числу λ.

Свойства.

1) $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (\mathbb{A} - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$;
2) $\vec{x}$ — собственный вектор оператора $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия: $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(\mathbb{A} - \lambda I)$.

Опр. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное число оператора $\mathbb{A}$; тогда множество $\mathrm{Ker}(\mathbb{A} - \lambda I) =: F_\lambda$ называется собственным подпространством оператора $\mathbb{A}$, отвечающим собственному числу λ.

Напомним: матрица $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ задает линейный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, если при всех $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ справедливо равенство $\mathbb{A}\vec{x} = A \cdot \vec{x}$.

Теорема 4.8. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор; $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ задает оператор $\mathbb{A}$. Тогда λ — собственное число оператора $\mathbb{A}$ если и только если λ — собственное число матрицы A.

Доказательство.

$$[\exists\, \vec{x} \neq \vec{0} : \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}] \Leftrightarrow [\exists\, \vec{x} \neq \vec{0} : (A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}] \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

□

Опр. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор; $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ задает оператор $\mathbb{A}$. Тогда характеристический многочлен $d_A(\lambda)$ матрицы A будем также называть характеристическим многочленом оператора $\mathbb{A}$ и обозначать $d_{\mathbb{A}}(\lambda)$.

Опр. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор, $d_{\mathbb{A}}(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \mu_1)^{\sigma_1} \ldots (\lambda - \mu_p)^{\sigma_p}$ (где $\mu_1, \ldots, \mu_p$ — все различные корни многочлена $d_{\mathbb{A}}(\lambda)$); тогда числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ — называются алгебраическими кратностями собственных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_p$ оператора $\mathbb{A}$; числа $\tau_1 = \mathrm{dimKer}(\mathbb{A} - \mu_1 I), \ldots, \tau_p = \mathrm{dimKer}(\mathbb{A} - \mu_p I)$ называются геометрическими кратностями собственных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_p$ оператора $\mathbb{A}$. Следующий набор

$$\sigma(\mathbb{A}) := \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \ldots & \mu_p \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \ldots & \sigma_p \\ \tau_1, & \tau_2, & \ldots & \tau_p \end{pmatrix}$$

называется *спектром* оператора $\mathbb{A}$.

Сформулируем без доказательства следующий результат.

Теорема 4.9. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор,

$$\sigma(\mathbb{A}) := \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \dots & \mu_p \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \dots & \sigma_p \\ \tau_1, & \tau_2, & \dots & \tau_p \end{pmatrix}$$

— спектр оператора $\mathbb{A}$. Тогда справедливы соотношения:

$$1 \leqslant \tau_i \leqslant \sigma_i \leqslant n, \quad i = 1, \dots, p, \quad \sigma_1 + \dots + \sigma_p = n.$$

Сформулируем теперь несколько утверждений о собственных подпространствах.

Теорема 4.10. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор,

$$\sigma(\mathbb{A}) := \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \dots & \mu_p \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \dots & \sigma_p \\ \tau_1, & \tau_2, & \dots & \tau_p \end{pmatrix}$$

— спектр оператора $\mathbb{A}$. Тогда сумма собственных подпространств $F_{\mu_1} + \dots + F_{\mu_p}$ — прямая.

Доказательство. Предположим некоторый вектор $\vec{x} \in F_{\mu_1} + \dots + F_{\mu_p}$ имеет представления

$$\vec{x} = \vec{f}_1 + \dots + \vec{f}_p = \vec{g}_1 + \dots + \vec{g}_p, \quad \text{где} \quad \vec{f}_i, \vec{g}_i \in F_{\mu_i}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Тогда справедливо равенство

$$(\vec{f}_1 - \vec{g}_1) + (\vec{f}_2 - \vec{g}_2) + (\vec{f}_3 - \vec{g}_3) + \dots + (\vec{f}_p - \vec{g}_p) = \vec{0}.$$

Подействуем на левую и правую части последнего соотношения оператором $\mathbb{A} - \mu_1$; учтем, что на любой вектор $\vec{h}_j$ из F_{μ_j} оператор $\mathbb{A}$ действует по формуле $\mathbb{A}\vec{h}_j = \mu_j \vec{h}_j$, а значит $(\mathbb{A} - \mu_1 I)\vec{h}_j = (\mu_j - \mu_1)\vec{h}_j$. Придем к равенству

$$(\mu_1 - \mu_1)(\vec{f}_1 - \vec{g}_1) + (\mu_2 - \mu_1)(\vec{f}_2 - \vec{g}_2) + (\mu_3 - \mu_1)(\vec{f}_3 - \vec{g}_3) + \dots + (\mu_p - \mu_1)(\vec{f}_p - \vec{g}_p) = \vec{0}.$$

Выбросим первое (равное нулю) слагаемое. Подействуем на полученное оператором $\mathbb{A} - \mu_2 I$ и получим

$$(\mu_3 - \mu_2)(\mu_3 - \mu_1)(\vec{f}_3 - \vec{g}_3) + \dots + (\mu_p - \mu_2)(\mu_p - \mu_1)(\vec{f}_p - \vec{g}_p) = \vec{0}.$$

Продолжая действовать так же, в конце концов придем к соотношению

$$(\mu_{p-1} - \mu_{p-2}) \dots (\mu_{p-1} - \mu_1)(\vec{f}_{p-1} - \vec{g}_{p-1}) + (\mu_p - \mu_{p-2}) \dots (\mu_p - \mu_1)(\vec{f}_p - \vec{g}_p) = \vec{0}.$$

Подействовав на это равенство оператором $\mathbb{A} - \mu_{p-1} I$ получим

$$(\mu_p - \mu_{p-1}) \dots (\mu_p - \mu_1)(\vec{f}_p - \vec{g}_p) = \vec{0},$$

откуда немедленно вытекает $\vec{f}_p - \vec{g}_p = \vec{0}$. Но тогда из предпоследнего равенства вытекает $\vec{f}_{p-1} - \vec{g}_{p-1} = \vec{0}$ и далее, рассуждая в обратном порядке, приходим к утверждению

$$\vec{f}_1 - \vec{g}_1 = \dots = \vec{f}_p - \vec{g}_p = \vec{0}.$$

□

Следствеи 4.11. В условиях теоремы 4.10 объединение базисов подпространств $F_{\mu_1}, \dots, F_{\mu_p}$ есть базис в прямой сумме $F_{\mu_1} \dot{+} \dots \dot{+} F_{\mu_p}$.

Примеры.

1) Пусть оператор $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ задан матрицей
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
Тогда справедливы очевидные соотношения:
$$d_{\mathbb{A}}(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$
$$\mathbb{A}\vec{e}_k = \lambda_k\vec{e}_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{где} \quad \{\vec{e}_k\}_{k=1}^n \text{ — стандартный базис в } \mathbb{C}^n.$$
Теперь ясно, что $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — все собственные числа оператора $\mathbb{A}$, занумерованные с учетом кратностей. Если μ — одно из этих собственных чисел, то F_μ есть линейная оболочка тех векторов e_k, для которых $\lambda_k = \mu$. Отметим, что для всех собственных значений оператора $\mathbb{A}$ алгебраическая и геометрическая кратности совпадают.

2) Пусть оператор $\mathbb{A} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ задан матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Нетрудно видеть, что справедливо равенство $d_{\mathbb{A}}(\lambda) = \lambda^2 = (\lambda - 0)^2$. Таким образом, единственным собственным числом оператора $\mathbb{A}$ является число 0, и его алгебраическая кратность равна двум. С другой стороны, решая задачу $(A - 0I)\vec{x} = \vec{0}$, мы получим собственное подпространство $F_0 = \mathscr{L}\{\vec{e}_1\}$, где $\vec{e}_1 = (1, 0)^t$. Таким образом, геометрическая кратность собственного числа 0 равна единице.

3) Пусть оператор $\mathbb{A} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ задан матрицей
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \text{ где угол } \varphi \in (0.\pi) \text{ — фиксирован.}$$
Легко найти характеристический многочлен
$$d_{\mathbb{A}}(\lambda) = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = (\lambda - e^{i\varphi})(\lambda - e^{-i\varphi}).$$
Решая задачу $(A - e^{i\varphi}I)\vec{x} = \vec{0}$, находим (используя равенство $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)
$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi - e^{i\varphi} & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi - e^{i\varphi} & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -i\sin\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -i\sin\varphi & 0 \end{array}\right) \overset{i \cdot I}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} \sin\varphi & -i\sin\varphi & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{I}{\sin\varphi}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\frac{I}{\sin\varphi}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \vec{x} = C\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$
Таким образом, находим подпространство $F_{e^{i\varphi}} = \mathscr{L}\{\vec{f_1}\}$, где $\vec{f_1} = (i, 1)^t$. Аналогично вычисляется второе собственное подпространство $F_{e^{-i\varphi}} = \mathscr{L}\{\vec{f_2}\}$, где $\vec{f_2} = (-i, 1)^t$. Алгебраическая и геометрическая кратности каждого собственного значения оператора $\mathbb{A}$ совпадают и равны единице; спектр оператора $\mathbb{A}$ имеет вид
$$\sigma(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & e^{-i\varphi} \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ниже мы исследуем собственные числа и собственные векторы линейных операторов в вещественных линейных пространствах на примере операторов в пространстве $\mathbb{R}^n$.

4. Собственные числа, собственные векторы и собственные подпространства оператора, действующего из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Алгебраическая и геометрическая кратности собственных чисел оператора, действующего из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Опр. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, заданный матрицей $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$. Собственными числами оператора $\mathbb{A}$ будем называть собственные числа матрицы A (в том числе и комплексные). Если $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное число оператора $\mathbb{A}$, то всякое ненулевое решение $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ уравнения $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ называется собственным вектором оператора $\mathbb{A}$, отвечающим собственному числу λ.

Оказывается невещественным собственным числам не отвечает ни одного собственного вектора. Более точно, справедлива следующая

Лемма 4.12. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, заданный матрицей $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$; $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Существует $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$;
2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): поскольку существует нетривиальное решение $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ уравнения

$$(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0},$$

справедливо равенство $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Кроме того, из равенства $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ вытекает соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} x_k = \lambda x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поскольку $\vec{x} \neq \vec{0}$, найдется i_0 такой, что $x_{i_0} \neq 0$, а потому

$$\lambda = \frac{\sum_{k=1}^{n} [A]_{i_0 k} x_k}{x_{i_0}} \in \mathbb{R}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): очевидно. □

Опр. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, $\lambda \in \mathbb{R}$ — собственное число оператора $\mathbb{A}$; тогда множество $\mathrm{Ker}(\mathbb{A} - \lambda I) =: F_\lambda$ называется собственным подпространством оператора $\mathbb{A}$, отвечающим собственному числу λ. Для каждого невещественного собственного числа λ определим собственное подпространство, отвечающее собственному числу λ, равенством $F_\lambda = \{\vec{0}\}$.

Опр. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор; $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ задает оператор $\mathbb{A}$. Тогда характеристический многочлен $d_A(\lambda)$ матрицы A будем также называть характеристическим многочленом оператора $\mathbb{A}$ и обозначать $d_{\mathbb{A}}(\lambda)$.

Опр. Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, $d_{\mathbb{A}}(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \mu_1)^{\sigma_1} \dots (\lambda - \mu_p)^{\sigma_p}$ (где $\mu_1, \dots, \mu_p$ — все различные корни многочлена $d_{\mathbb{A}}(\lambda)$); тогда числа $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ — называются алгебраическими кратностями собственных чисел $\mu_1, \dots, \mu_p$ оператора $\mathbb{A}$; числа $\tau_1 = \mathrm{dim} F_{\mu_1}, \dots, \tau_p = \mathrm{dim} F_{\mu_p}$ называются геометрическими кратностями собственных чисел $\mu_1, \dots, \mu_p$ оператора $\mathbb{A}$. Следующий набор

$$\sigma(\mathbb{A}) := \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \dots & \mu_p \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \dots & \sigma_p \\ \tau_1, & \tau_2, & \dots & \tau_p \end{pmatrix}$$

называется *спектром* оператора $\mathbb{A}$.

Сформулируем без доказательства следующий результат.

Теорема 4.13. Пусть $\mathbb{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — линейный оператор,

$$\sigma(\mathbb{A}) := \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \dots & \mu_p \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \dots & \sigma_p \\ \tau_1, & \tau_2, & \dots & \tau_p \end{pmatrix}$$

— спектр оператора $\mathbb{A}$. Тогда справедливы соотношения:

$$0 \leqslant \tau_i \leqslant \sigma_i \leqslant n, \quad i=1,\dots,p, \quad \sigma_1+\dots+\sigma_p = n.$$

Сформулируем теперь несколько утверждений о собственных подпространствах.

Теорема 4.14. Пусть $\mathbb{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — линейный оператор,

$$\sigma(\mathbb{A}) := \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \dots & \mu_p \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \dots & \sigma_p \\ \tau_1, & \tau_2, & \dots & \tau_p \end{pmatrix}$$

— спектр оператора $\mathbb{A}$. Тогда сумма собственных подпространств $F_{\mu_1}+\dots+F_{\mu_p}$ — прямая.

Доказательство. Без доказательства. □

Следствие 4.15. В условиях теоремы 4.14 объединение базисов подпространств $F_{\mu_1},\dots,F_{\mu_p}$ есть базис в прямой сумме $F_{\mu_1}\dot{+}\dots\dot{+}F_{\mu_p}$.

Примеры.

1) Пусть оператор $\mathbb{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Тогда справедливы очевидные соотношения:

$$d_{\mathbb{A}}(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_n), \quad \lambda\in\mathbb{C},$$

$$\mathbb{A}\vec{e}_k = \lambda_k\vec{e}_k, \quad k=1,\dots,n, \quad \text{где} \quad \{\vec{e}_k\}_{k=1}^n \text{ — стандартный базис в } \mathbb{C}^n.$$

Теперь ясно, что $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ — все собственные числа оператора $\mathbb{A}$, занумерованные с учетом кратностей. Если μ — одно из этих собственных чисел, то F_μ есть линейная оболочка тех векторов e_k, для которых $\lambda_k=\mu$. Отметим, что для всех собственных значений оператора $\mathbb{A}$ алгебраическая и геометрическая кратности совпадают.

2) Пусть оператор $\mathbb{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \text{ где угол } \varphi\in(0.\pi) \text{ — фиксирован.}$$

Легко найти характеристический многочлен

$$d_{\mathbb{A}}(\lambda) = (\cos\varphi-\lambda)^2+\sin^2\varphi = \lambda^2-2\lambda\cos\varphi+1 = (\lambda-e^{i\varphi})(\lambda-e^{-i\varphi}).$$

Собственные числа оператора $\mathbb{A}$ невещественны; таким образом, собственные подпространства тривиальны: $F_{e^{\pm i\varphi}}=\{\vec{0}\}$; спектр оператора $\mathbb{A}$ имеет вид

$$\sigma(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & e^{-i\varphi} \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$