Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 26.03.2020

§3. Линейные операторы в линейном пространстве

1. Определение линейного оператора; простейшие свойства линейных операторов. Примеры линейных операторов.

Опр. Пусть E, F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$. Отображение $\mathbb{A} : E \to F$ (отображение $\mathbb{A}$ из E в F) называется линейным отображением (или линейным оператором), если выполнены следующие условия:

- при всех $x, y \in E$ справедливо равенство $\mathbb{A}(x + y) = \mathbb{A}(x) + \mathbb{A}(y)$;
- при всех $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$ справедливо равенство $\mathbb{A}(\alpha x) = \alpha\mathbb{A}(x)$.

Обозначение. Ниже, как правило, будем писать $\mathbb{A}x$ вместо $\mathbb{A}(x)$.

Свойства.

1) $\mathbb{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathbb{A}x + \beta\mathbb{A}y$, $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

   Доказательство. $\mathbb{A}(\alpha x + \beta y) = \mathbb{A}(\alpha x) + \mathbb{A}(\beta y) = \alpha\mathbb{A}x + \beta\mathbb{A}y$. □

2) $\mathbb{A}\left(\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k e_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k \mathbb{A} e_k$, $\{e_k\}_{k=1}^{p} \subset E$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^{p} \subset \mathbb{K}$.

   Доказательство. По индукции. □

3) $\mathbb{A}\mathbb{O}_E = \mathbb{O}_F$.

   Доказательство. $\mathbb{A}\mathbb{O}_E = \mathbb{A}(0 \cdot \mathbb{O}_E) = 0 \cdot \mathbb{A}\mathbb{O}_E = \mathbb{O}_F$. □

4) $\mathbb{A}(-x) = -\mathbb{A}x$, $x \in E$.

   Доказательство. $\mathbb{A}x + \mathbb{A}(-x) = \mathbb{A}(x + (-x)) = \mathbb{A}\mathbb{O}_E = \mathbb{O}_F$. □

5) Если набор $\{f_k\}_{k=1}^{p} \subset E$ линейно зависим, то набор $\{\mathbb{A}f_k\}_{k=1}^{p}$ тоже линейно зависим.

   Доказательство. Найдутся числа $\{\alpha_k\}_{k=1}^{p} \subset \mathbb{K}$ такие, что $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k f_k = \mathbb{O}_E$, $\sum\limits_{k=1}^{p} |\alpha_k| > 0$. Тогда справедливы равенства
   $$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \left(\mathbb{A}f_k\right) = \mathbb{A}\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k\right) = \mathbb{A}\mathbb{O}_E = \mathbb{O}_F.$$
   Таким образом, набор $\{\mathbb{A}f_k\}_{k=1}^{p}$ тоже линейно зависим. □

Примеры.

1) Пусть E, F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; отображение $\mathbb{A} : E \to F$ задано равенством $\mathbb{A}x = \mathbb{O}_F$, $x \in E$. Тогда $\mathbb{A}$ — линейный оператор. Часто оператор $\mathbb{A}$ обозначают через $\mathbb{O}_{E,F}$ (или просто через $\mathbb{O}$) и называют *нулевым* оператором.

2) Пусть $E = F$ — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; отображение $\mathbb{A} : E \to E$ задано равенством $\mathbb{A}x = x$, $x \in E$. Тогда $\mathbb{A}$ — линейный оператор. Оператор $\mathbb{A}$ часто обозначают через I_E (или просто через I) и называют *единичным* или *тождественным* оператором.

3) Пусть задана матрица $A \in M^{m,n}(\mathbb{K})$; определим отображение $\mathbb{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ равенством $\mathbb{A}\vec{x} = A \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{K}^n$. Тогда $\mathbb{A}$ — линейный оператор.
4) Пусть $E = F = C^\infty([a,b] \to \mathbb{K})$ — пространство бесконечно гладких функций на отрезке $[a,b]$ (со значениями в поле $\mathbb{K}$). Определим отображение $\mathbb{A} : E \to F$ равенством $\mathbb{A}f = \frac{df}{dx}$, $f \in E$. Тогда $\mathbb{A}$ — линейный оператор.
5) Пусть $E = \Omega_n(\mathbb{K})$ — пространство многочленов степени не выше n (с коэффициентами из $\mathbb{K}$); $F = \mathbb{K}$. Определим отображение $\mathbb{A} : E \to F$ равенством $\mathbb{A}P = P(0)$ (т.е. каждому многочлену $P \in \Omega_n(\mathbb{K})$ оператор $\mathbb{A}$ сопоставляет значение этого многочлена в точке 0). Тогда $\mathbb{A}$ — линейный оператор.
6) Пусть в пространстве выделена точка O, $E = F = E_3$ — пространство всевозможных радиус-векторов, с началом в точке O. Пусть $\vec{j} \neq \vec{0}$ — произвольный вектор из E. Определим отображение $\mathbb{A} : E \to F$ соотношением $\mathbb{A}\vec{x} = K_{\vec{j}}\vec{x}$ — компонента вектора $\vec{x}$ по вектору $\vec{j}$. Тогда $\mathbb{A}$ — линейный оператор.

2. Сложение линейных операторов, умножение на число линейных операторов. Пространство линейных операторов.

Опр. Пусть E, F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; $\mathbb{A} : E \to F$, $\mathbb{B} : E \to F$ — линейные операторы. Тогда суммой операторов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ назовем отображение $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) : E \to F$, определяемое равенством

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B})(x) = (\mathbb{A}x) + (\mathbb{B}x), \quad x \in E.$$

Свойство. $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ — линейный оператор.

Доказательство.

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B})(x + y) = (\mathbb{A}(x + y)) + (\mathbb{B}(x + y)) = (\mathbb{A}x + \mathbb{A}y) + (\mathbb{B}x + \mathbb{B}y) =$$
$$= (\mathbb{A}x + \mathbb{B}x) + (\mathbb{A}y + \mathbb{B}y) = (\mathbb{A} + \mathbb{B})(x) + (\mathbb{A} + \mathbb{B})(y), \quad x, y \in E;$$

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B})(\alpha x) = (\mathbb{A}(\alpha x)) + (\mathbb{B}(\alpha x)) =$$
$$= (\alpha\mathbb{A}x) + (\alpha\mathbb{B}x) = \alpha(\mathbb{A}x + \mathbb{B}x) = \alpha(\mathbb{A} + \mathbb{B})(x), \quad \alpha \in \mathbb{K}, \quad x \in E.$$

□

Опр. Пусть E, F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; $\alpha \in \mathbb{K}$, $\mathbb{A} : E \to F$ — линейный оператор. Тогда произведением числа α на оператор $\mathbb{A}$ называется отображение $\alpha\mathbb{A} : E \to F$, определяемое равенством

$$(\alpha\mathbb{A})(x) = \alpha(\mathbb{A}x), \quad x \in E.$$

Свойство. $\alpha\mathbb{A}$ — линейный оператор.

Доказательство.

$$(\alpha\mathbb{A})(x + y) = \alpha(\mathbb{A}(x + y)) = \alpha(\mathbb{A}x + \mathbb{A}y) = \alpha(\mathbb{A}x) + \alpha(\mathbb{A}y) = (\alpha\mathbb{A})(x) + (\alpha\mathbb{A})(y), \quad x, y \in E;$$

$$(\alpha\mathbb{A})(\beta x) = \alpha(\mathbb{A}(\beta x)) = \alpha(\beta(\mathbb{A}x)) = \beta(\alpha(\mathbb{A}x)) = \beta(\alpha\mathbb{A})(x), \quad x \in E, \alpha \in \mathbb{K}.$$

□

Обозначение. Пусть E, F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$. Множество линейных операторов из E в F обозначим через $\Lambda(E, F)$.

Теорема 3.1 Пусть E, F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$. Тогда множество $\Lambda(E, F)$ является линейным пространством относительно определенных выше операций сложения и умножения на число.

Доказательство. Все свойства очевидны. Отметим только, что нулевой оператор $\mathbb{O}_{E,F}$ играет роль нуля в пространстве $\Lambda(E, F)$, а для каждого оператора $\mathbb{A}$ оператор $(-1)\mathbb{A}$ играет роль противоположного элемента. □

3. Произведение линейных операторов.

Опр. Пусть E, F и G — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; $\mathbb{A} : E \to F$, $\mathbb{B} : F \to G$ — линейные операторы. Тогда произведением линейных операторов $\mathbb{B}$ и $\mathbb{A}$ называется отображение $\mathbb{BA} : E \to G$, определенное равенством

$$(\mathbb{BA})(x) = \mathbb{B}(\mathbb{A}(x)), \quad x \in E.$$

Иными словами $\mathbb{BA}$ — композиция отображений.

Свойство. $\mathbb{BA}$ — линейный оператор.

Доказательство.

$$\mathbb{BA}(x + y) = \mathbb{B}(\mathbb{A}(x + y)) = \mathbb{B}(\mathbb{A}x + \mathbb{A}y) = \mathbb{B}(\mathbb{A}x) + \mathbb{B}(\mathbb{A}y) = \mathbb{BA}(x) + \mathbb{BA}(y), \quad x, y \in E;$$

$$\mathbb{BA}(\alpha x) = \mathbb{B}(\mathbb{A}(\alpha x)) = \mathbb{B}(\alpha(\mathbb{A}x)) = \alpha(\mathbb{B}(\mathbb{A}x)) = \alpha\mathbb{BA}(x), \quad x \in E, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

□

Упр. Пусть E, F, G, H — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$.

1) $\mathbb{B}(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2) = \mathbb{BA}_1 + \mathbb{BA}_2$, $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 \in \Lambda(E, F)$, $\mathbb{B} \in \Lambda(F, G)$;
2) $(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2)\mathbb{A} = \mathbb{B}_1\mathbb{A} + \mathbb{B}_2\mathbb{A}$, $\mathbb{A} \in \Lambda(E, F)$, $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2 \in \Lambda(F, G)$;
3) $\mathbb{B}(\alpha\mathbb{A}) = (\alpha\mathbb{B})\mathbb{A} = \alpha(\mathbb{BA})$, $\mathbb{A} \in \Lambda(E, F)$, $\mathbb{B} \in \Lambda(F, G)$;
4) $\mathbb{C}(\mathbb{BA}) = (\mathbb{CB})\mathbb{A}$, $\mathbb{A} \in \Lambda(E, F)$, $\mathbb{B} \in \Lambda(F, G)$, $\mathbb{C} \in \Lambda(G, H)$;
5) $\mathbb{O}_{F,G}\mathbb{A} = \mathbb{O}_{E,G}$, $\mathbb{A} \in \Lambda(E, F)$;
6) $\mathbb{B}\mathbb{O}_{E,F} = \mathbb{O}_{E,G}$, $\mathbb{B} \in \Lambda(F, G)$;
7) $I_E\mathbb{A} = \mathbb{A}I_E = \mathbb{A}$, $\mathbb{A} \in \Lambda(E, E)$.

4. Обратный к линейному оператору. Изоморфизм линейных пространств.

Лемма 3.2 Пусть E, F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; $\mathbb{A} : E \to F$ — линейный оператор, $\mathbb{A}$ — биекция. Тогда $\mathbb{A}^{-1}$ линейный оператор.

Доказательство. Пусть выполнены следующие условия:

$$y_1, y_2 \in F \quad \mathbb{A}x_1 = y_1 \quad \mathbb{A}x_2 = y_2.$$

Тогда $\mathbb{A}(x_1 + x_1) = \mathbb{A}x_1 + \mathbb{A}x_2 = y_1 + y_2$. Следовательно, справедливы соотношения

$$\mathbb{A}^{-1}(y_1 + y_2) = \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = \mathbb{A}^{-1}y_1 + \mathbb{A}^{-1}y_2.$$

Далее предположим, что выполнены условия $y \in F, \quad \mathbb{A}x = y$. Тогда при любом $\alpha \in \mathbb{K}$ имеет место равенство $\mathbb{A}(\alpha x) = \alpha y$. Следовательно, справедливы соотношения

$$\mathbb{A}^{-1}(\alpha y) = \alpha x = \alpha \mathbb{A}^{-1} y.$$

□

Опр. Пусть E, F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; отображение $J : E \to F$ называется изоморфизмом (линейных пространств E и F), если J — линейный оператор и биекция. Говорят, что пространство E изоморфно пространству F.

Упр.

1) Если J — изоморфизм, то J^{-1} — изоморфизм (если пространство E изоморфно пространству F, то и пространство F изоморфно пространству E).
2) Тождественный оператор — изоморфизм (каждое пространство изоморфно самому себе).
3) Пусть E, F, G — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; отображения $J_1 : E \to F$, $J_2 : F \to G$ — изоморфизмы. Тогда $J_2 J_1$ — изоморфизм (если пространство E изоморфно пространству F, а пространство F изоморфно пространству G, то пространство E изоморфно пространству G).
4) Пусть E, F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; отображение $J : E \to F$ — изоморфизм. Тогда $Jx = \mathbb{O}_F \Leftrightarrow x = \mathbb{O}_E$.
5) Пусть E, F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; отображение $J : E \to F$ — изоморфизм; $\{e_i\}_{i=1}^n \subset E$. Тогда набор векторов $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейно зависим в том и только в том случае, если $\{Je_i\}_{i=1}^n$ — линейно зависимый набор.

Теорема 3.3 Пусть E, F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$. Тогда пространства E и F изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim E = \dim F$.

Доказательство. Задача. □

Примеры.

1) Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис в E. Определим отображение $J : \mathbb{K}^n \to E$ равенством
$$J \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$
Тогда J — изоморфизм. Иными словами, отображение связывающее вектор и столбец его координат (в фиксированном базисе) является изоморфизмом.
2) Пусть E, F — конечномерные линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$, $\dim E = \dim F$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис в E, $\{f_i\}_{i=1}^n$ — базис в f. Определим отображение $J : E \to F$ следующим образом. Для каждого вектора $x \in E$ существует единственный

набор координат $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ такой, что $x = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Определим Jx равенством

$$Jx = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i.$$

Тогда J — изоморфизм.

3) Пусть в пространстве выделены две точки O, O'. Обозначим через E_3 пространство радиус-векторов с началом в точке O; обозначим через E_3' пространство радиус-векторов с началом в точке O'. Определим отображение $J : E_3 \to E_3'$ равенством $J\vec{a} = \vec{a}'$, где $\vec{a} = \vec{a}'$ (напомним, что векторы с началами в разных точках считаются равными, если они сонаправлены и равны по длине).

5. Действие матриц из $M^{m,n}(\mathbb{K})$ на векторы из $\mathbb{K}^n$. Линейные операторы из $\mathbb{K}^n$ в $\mathbb{K}^m$.

Предположим, что задана фиксированная матрица $A \in M^{m,n}(\mathbb{K})$. Как уже было сказано выше (см. п.1, пример №3) отображение $\mathbb{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ заданное равенством

$$\mathbb{A}\vec{x} = A \cdot \vec{x}$$

является линейным оператором. Задача этого пункта описать все линейные операторы, действующие из $\mathbb{K}^n$ в $\mathbb{K}^m$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.4 Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ — линейный оператор. Тогда существует единственная матрица $A \in M^{m,n}(\mathbb{K})$ такая, что при всех $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ справедливо равенство $\mathbb{A}\vec{x} = A \cdot \vec{x}$.

Доказательство. 1) *Существование.* Обозначим через $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ векторы стандартного базиса:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

введем векторы

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} := \mathbb{A}\vec{e}_1, \ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} := \mathbb{A}\vec{e}_2, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \mathbb{A}\vec{e}_n.$$

Проверим, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию $\mathbb{A}\vec{x} = A \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$. Действительно, как нам давно известно, при умножении матрицы A на j-й вектор стандартного базиза получается j-й столбец матрицы A:

$$A\vec{e}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \mathbb{A}\vec{e}_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Следовательно, для произвольного вектора $\vec{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j$ справедливы соотношения

$$\mathbb{A}\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{A}\vec{e}_j = \sum_{i=j}^{n} \alpha_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A\vec{x}.$$

2) *Единственность.* Предположим, что существует две матрицы $A, \tilde{A} \in M^{m,n}(\mathbb{K})$, удовлетворяющие условию $\mathbb{A}\vec{x} = A \cdot \vec{x} = \tilde{A} \cdot \vec{x}$, при всех $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$. Тогда при всех $j = 1, \dots, n$ j-е столбцы матриц A и $\tilde{A}$ равны вектору $\mathbb{A}\vec{e}_j$ и совпадают. Следовательно, матрицы A и $\tilde{A}$ совпадают. $\square$

Обозначение. Мы будем говорить, что матрица A изображает оператор $\mathbb{A}$ в паре стандартных базисов, или короче: матрица A задает оператор $\mathbb{A}$. Будем писать: $\mathbb{A} \longleftrightarrow A$.

Упр. Если $\mathbb{A} \longleftrightarrow A$, $\mathbb{B} \longleftrightarrow B$, то (при подходящих условиях на операторы и матрицы)

- $\alpha\mathbb{A} \longleftrightarrow \alpha A$, $\alpha \in \mathbb{K}$;
- $\mathbb{A} + \mathbb{B} \longleftrightarrow A + B$;
- $\mathbb{B}\mathbb{A} \longleftrightarrow BA$.

6. Изображение линейного оператора в паре базисов.

Опр. Пусть E, F — конечномерные линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис в пространстве E, $\{f_j\}_{j=1}^m$ — базис в пространстве F. Отображение $\mathbb{A} : E \to F$ — линейный оператор. Предположим, что заданы координаты векторов $\mathbb{A}e_i$, $i = 1, \dots, n$, в базисе $\{f_j\}_{j=1}^m$:

$$\mathbb{A}e_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbb{A}e_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbb{A}e_n \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленная из столбцов координат векторов $\mathbb{A}e_i$, $i = 1, \dots, n$, в базисе $\{f_j\}_{j=1}^m$ называется изображающей матрицей оператора $\mathbb{A}$ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{f_j\}_{j=1}^m$.

Значение оператора $\mathbb{A}$ на любом векторе $x \in E$ однозначно восстанавливается по координатам вектора x в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ и матрице A. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.5 Пусть E, F — конечномерные линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис в пространстве E, $\{f_j\}_{j=1}^m$ — базис в пространстве F; $\mathbb{A} : E \to F$ — линейный оператор; A — матрица, изображающая оператор $\mathbb{A}$ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{f_j\}_{j=1}^m$. Тогда, если вектор $x \in E$ имеет координаты $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ в базисе $\{e_k\}_{k=1}^n$, то вектор $\mathbb{A}x$ в базисе $\{f_l\}_{l=1}^m$ имеет координаты $\beta_l = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{lk}\alpha_k$, $l = 1, \dots, m$, т.е.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \leftrightarrow x \mapsto \mathbb{A}x \leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Доказательство. В силу линейности оператора $\mathbb{A}$ справедливы соотношения:

$$\mathbb{A}x = \mathbb{A}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{A} e_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{l=1}^{m} a_{lk} f_l = \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\alpha_k\right) f_l,$$

$$\text{т.о.} \quad \beta_l = \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\alpha_k, \quad l = 1, \ldots, m.$$

□

Упр.

1) Матрица, построенная в пункте 5, действительно изображает оператор $\mathbb{A}$ в паре стандартных базисов.
2) $\alpha\mathbb{A} \longleftrightarrow \alpha A$, $\alpha \in \mathbb{K}$;
3) $\mathbb{A} + \mathbb{B} \longleftrightarrow A + B$;
4) $\mathbb{B}\mathbb{A} \longleftrightarrow BA$.

Замечание 3.6 Пусть E, F — конечномерные линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ — базис в пространстве E, $\{f_j\}_{j=1}^{m}$ — базис в пространстве F. Предположим, что отображение $J : \Lambda(E, F) \to M^{m,n}(\mathbb{K})$ сопоставляет каждому оператору $\mathbb{A} : E \to F$ его изображающую матрицу в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^{n}$, $\{f_j\}_{j=1}^{m}$. Тогда J — изоморфизм.

Доказательство. Задача. □

7. Ядро, образ и ранг линейного оператора.

Опр. Пусть E, F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; $\mathbb{A} : E \to F$ — линейный оператор. Тогда

- Ядром оператора $\mathbb{A}$ называется множество $\mathrm{Ker}\mathbb{A} := \{z \in E : \mathbb{A}z = \mathbb{O}_F\}$;
- Образом оператора $\mathbb{A}$ называется множество $\mathrm{Ran}\mathbb{A} := \{y \in F : y = \mathbb{A}x,\ x \in E\}$.

Свойство. Ядро оператора $\mathbb{A}$ — подпространство в E; образ оператора $\mathbb{A}$ — подпространство в F.

Доказательство. 1) Для любых $x, y \in \mathrm{Ker}\mathbb{A}$ верны равенства

$$\mathbb{A}(x + y) = \mathbb{A}x + \mathbb{A}y = \mathbb{O}_F + \mathbb{O}_F = \mathbb{O}_F.$$

Следовательно, верно включение $x + y \in \mathrm{Ker}\mathbb{A}$.

2) Для любого $x \in \mathrm{Ker}\mathbb{A}$ и любого $\alpha \in \mathbb{K}$ верны равенства $\mathbb{A}(\alpha x) = \alpha\mathbb{A}x = \alpha\mathbb{O}_F = \mathbb{O}_F$, а потому справедливо включение $\alpha x \in \mathrm{Ker}\mathbb{A}$.

3) Для любых $y_1, y_2 \in \mathrm{Ran}\mathbb{A}$ верны равенства $y_1 = \mathbb{A}x_1$, $y_2 = \mathbb{A}x_2$, а потому $(y_1 + y_2) = \mathbb{A}(x_1 + x_2)$. Следовательно, верно включение $y_1 + y_2 \in \mathrm{Ran}\mathbb{A}$.

4) Для любого $y \in \mathrm{Ran}\mathbb{A}$ и любого $\alpha \in \mathbb{K}$ верно равенство $y = \mathbb{A}x$, а вместе с ним $\alpha y = \mathbb{A}(\alpha x)$. Следовательно, справедливо включение $\alpha y \in \mathrm{Ran}\mathbb{A}$. □

Опр. Рангом оператора $\mathbb{A}$ называется размерность его образа:

$$\mathrm{rank}\mathbb{A} := \mathrm{dim}\mathrm{Ran}\mathbb{A}.$$

Свойства.

1) Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис в пространстве E. Тогда справедливо равенство

$$\mathrm{Ran}\mathbb{A} = \mathscr{L}\{\mathbb{A}e_1, \ldots, \mathbb{A}e_n\}.$$

Доказательство. $y = \mathbb{A}x = \mathbb{A}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{A} e_k.$ □

2) Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ — линейный оператор, заданный матрицей $A \in M^{m,n}(\mathbb{K})$. Тогда верно равенство $\mathrm{rank}\mathbb{A} = \mathrm{rank}A$.

Доказательство. Применяя предыдущий результат к стандартному базису в $\mathbb{K}^n$, получим, что образ оператора $\mathbb{A}$ есть линейная оболочка столбцов матрицы A, откуда и вытекает требуемое утверждение. □