Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 16.04.2020

§5. Изоморфизм евклидовых пространств

1. Несколько замечаний о задании оператора на базисных векторах. В этом пункте мы вернемся к теории линейных операторов в линейных пространствах. Любой линейный оператор достаточно задать только на базисных векторах.

Теорема 5.1. Пусть E и F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; $\{e_k\}_{k=1}^n$ — базис в пространстве E; $\{f_k\}_{k=1}^n$ — произвольный набор векторов из пространства F. Тогда существует единственный линейный оператор $\mathbb{A} \in \Lambda(E, F)$ удовлетворяющий условиям

$$\mathbb{A}e_k = f_k, \quad k = 1, \dots, n. \tag{+}$$

Доказательство. Проверим существование. Определим отображение $\mathbb{A} : E \to F$ следующим образом:

$$\forall x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \in E \quad \mathbb{A}x = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k.$$

Нетрудно видеть, что построенное отображение линейно:

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \quad y = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \Rightarrow \alpha x + \beta y = \sum_{k=1}^n (\alpha\alpha_k + \beta\beta_k) e_k \Rightarrow$$

$$\mathbb{A}(x + y) = \sum_{k=1}^n (\alpha\alpha_k + \beta\beta_k) f_k = \alpha \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k + \beta \sum_{k=1}^n \beta_k f_k = \mathbb{A}x + \mathbb{A}y,$$

и удовлетворяет условиям (+):

$$e_k = 0e_1 + \ldots + 0e_{k-1} + 1e_k + 0e_{k+1} + \cdots + 0e_n \Rightarrow$$

$$\mathbb{A}e_k = 0f_1 + \ldots + 0f_{k-1} + 1f_k + fe_{k+1} + \cdots + 0f_n = f_k.$$

Проверим единственность. Пусть линейные операторы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ удовлетворяют условию (+). Тогда при всяком $x = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k e_k \in E$ справедливо равенство

$$\mathbb{B}x = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{B}e_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{A}e_k = \mathbb{A}x.$$

Таким образом $\mathbb{A} = \mathbb{B}$. □

Пусть E и F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; вспомним, что изоморфизмом линейных пространств E и F называют линейное отображение $J : E \to F$, если оно является биекцией.

Теорема 5.2. Пусть E и F — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$; $\{e_k\}_{k=1}^n$ — базис в пространстве E; $\{f_k\}_{k=1}^n$ — базис в пространстве F; линейный оператор $\mathbb{A} \in \Lambda(E, F)$ удовлетворяет условиям

$$\mathbb{A}e_k = f_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда $\mathbb{A}$ — изоморфизм.

Доказательство.

1) Для всякого $f = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k f_k$ найдется $x = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k e_k$ такой, что $\mathbb{A}x = f$.

2) Предположим для некоторых $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in E$ и $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k \in E$ справедливо равенство $\mathbb{A}x = \mathbb{A}y$; тогда верно соотношение $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k f_k$, а потому $\alpha_k = \beta_k$, $k = 1, \dots, n$, т.е. $x = y$.

Таким образом $\mathbb{A}$ — изоморфизм. □

2. Изоморфизм евклидовых пространств. Обратите внимание, что далее мы разбираем случай вещественного и комплексного евклидовых пространства одновременно. Иногда это будет приводить к тому, что в формулах будут встречаться комплексное сопряжение или вещественная часть. Это не приведет к недоразумениям, если помнить, что для вещественного z справедливы равенства $z = \overline{z} = \mathrm{Re} z$.

Опр. Пусть E и F — евклидовы пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$. Говорят, что отображение $J : E \to F$ — изоморфизм евклидовых пространств, если J — изоморфизм линейных пространств, J сохраняет скалярное произведение, т.е.

$$\forall x, y \in E \ \ (Jx, Jy) = (x, y).$$

Евклидовы пространства E и F называются изоморфными, если существует отображение $J : E \to F$ — изоморфизм евклидовых пространств.

Теорема 5.3. Пусть E и F — конечномерные евклидовы пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$. Тогда евклидовы пространства E и F изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathrm{dim} E = \mathrm{dim} F$.

Доказательство. Если E и F изоморфны как евклидовы пространства, то они изоморфны и как линейные пространства, а потому $\mathrm{dim} E = \mathrm{dim} F$.

Обратно предположим, что выполнено условие $\mathrm{dim} E = \mathrm{dim} F = n$. Выберем ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ в пространстве E и ортонормированный базис $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ в пространстве F. Определим оператор J условиями

$$Je_k = f_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для любых $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in E$ и $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k \in E$ справедливо равенство

$$(Jx, Jy) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k, \sum_{l=1}^{n} \beta_l f_l) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_k} = (x, y).$$

При этом, по теореме 5.2, оператор J — изоморфизм линейных пространств. □

§6. Ортогональная сумма подпространств. Ортогональное дополнение. Ортогональные проекторы

1. Ортогональная сумма подпространств в евклидовом пространстве.

Опр. Пусть E — евклидово пространство; F — подпространство в E, $g \in E$. Будем говорить, что вектор g ортогонален подпространству F ($g \perp F$), если вектор g ортогонален каждому вектору из подпространства F.

Опр. Пусть E — евклидово пространство; F, G — подпространства в E. Будем говорить что подпространства F и G ортогональны, если

$$\forall f \in F,\ g \in G \quad f \perp g.$$

Примеры.

1) Пусть в пространстве выделена точка O; $E = E_3$ — пространство радиус-векторов с началом в точке O. Пусть l_1 и l_2 — две ортогональные прямые, проходящие через точку O; $F = E_{l_1}$, $G = E_{l_2}$ подпространства радиус векторов лежащих на прямых l_1 и l_2, соответственно. Тогда $F \perp G$.
2) Пусть в пространстве выделена точка O; $E = E_3$ — пространство радиус-векторов с началом в точке O. Пусть l — прямая, проходящая через точку O, α — плоскость перпендикулярная прямой l и проходящая через точку O; $F = E_l$ — подпространство радиус векторов, лежащих на прямой l; $G = E_\alpha$ — подпространство радиус векторов, лежащих на плоскости α. Тогда $F \perp G$.
3) Пусть задано стандартное вещественное евклидово пространство $E = \mathbb{R}^3$; $F = \mathscr{L}\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$, $G = \mathscr{L}\{\vec{g}_0\}$, где $\vec{f}_1 = (1,1,1)^t$, $\vec{f}_2 = (1,-1,1)^t$, $\vec{g}_0 = (1,0,-1)^t$. Тогда $F \perp G$.

   Доказательство. Нетрудно видеть, что выполнены соотношения $\vec{g}_0 \perp \vec{f}_1$, $\vec{g}_0 \perp \vec{f}_2$. Следовательно, для любых векторов $\vec{f} = \alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2 \in F$, $\vec{g} = \gamma \vec{g}_0 \in G$ справедливо равенство

   $$(\vec{f}, \vec{g}) = \alpha\gamma(f_1, g_0) + \beta\gamma(\vec{f}_2, \vec{g}_0) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \vec{f} \perp \vec{g}.$$

   □

Свойство. Пусть E — евклидово пространство; F, G — подпространства в E, $F \perp G$. Тогда $F \cap G = \{\mathbb{O}\}$.

Доказательство. Пусть некоторый вектор x принадлежит пересечению подпространств F и G. Следовательно $x \in F$, $x \in G$, а потому $(x, x) = 0$, и значит $x = \mathbb{O}$. □

Теорема 6.1. Пусть E — евклидово пространство; $F_1, \ldots, F_p$ — подпространства в E; $F_i \perp F_j$ при $i \neq j$. Тогда сумма подпространств $F_1 + \cdots + F_p$ — прямая.

Доказательство. Предположим, что вектор $x \in F_1 + \cdots + F_p$ имеет два представления

$$x = f_1 + \cdots + f_p = h_1 + \cdots + h_p, \quad f_1, h_1 \in F_1, \ldots, f_p, h_p \in F_p.$$

Тогда справедливо равенство

$$(f_1 - h_1) + \cdots + (f_p - h_p) = \mathbb{O}.$$

Умножая скалярно последнее равенство на вектор $f_j - h_j$ и пользуясь соотношением

$$(f_j - h_j, f_k - h_k) = 0, \quad \text{при} \quad j \neq k,$$

получим равенство $(f_j - h_j, f_j - h_j) = 0$, откуда и следует $f_j = h_j$ при любом $j = 1, \ldots, p$. □

Опр. Пусть E — евклидово пространство; $F_1, \dots, F_p$ — подпространства в E; $F_i \perp F_j$ при $i \neq j$. Тогда сумма подпространств $F_1 + \dots + F_p$ называется ортогонольной суммой и обозначается $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Примеры.

1) Пусть в пространстве выделена точка O; $E = E_3$ — пространство радиус-векторов с началом в точке O. Пусть l — прямая, проходящая через точку O, α — плоскость перпендикулярная прямой l и проходящая через точку O; $F = E_l$ — подпространство радиус векторов, лежащих на прямой l; $G = E_\alpha$ — подпространство радиус векторов, лежащих на плоскости α. Тогда $F \perp G$; $F \oplus G = E$.
2) Пусть в пространстве выделена точка O; $E = E_3$ — пространство радиус-векторов с началом в точке O. Пусть l_1, l_2 и l_3 — три ортогональные прямые, проходящие через точку O; $F_1 = E_{l_1}$, $F_2 = E_{l_2}$, $F_3 = E_{l_3}$ подпространства радиус векторов лежащих на прямых l_1, l_2 и l_3, соответственно. Тогда $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = E$.

Теорема 6.2. Пусть E — евклидово пространство; $F_1, \dots, F_p$ — подпространства в E; $F_i \perp F_j$ при $i \neq j$. Тогда объединение ортонормированных базисов подпространств $F_1, \dots, F_p$ является ортонормированным базисом в $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Доказательство. Объединение базисов подпространств $F_1, \dots, F_p$ является базисом в прямой сумме $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Остается проверить что полученный базис ортонормированный. По построению все векторы базиса единичной длины. Если два вектора базиса принадлежат одному подпространству, то они ортогональны, т.к. исходные базисы были ортонормированы; если два вектора базиса принадлежат разным подпространствам, то они ортогональны, т.к. подпространства ортогональны. □

2. Ортогональное дополнение подпространства в евклидовом пространстве. Ортогональный проектор.

Свойство. Пусть E — евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $M \subset E$— некоторое подмножество пространства E. Тогда множество $M^\perp = \{x \in E : \forall f \in M \quad x \perp f\}$ является подпространством в E.

Доказательство. Для любых векторов $x, y \in M^\perp$ справедливо равенство

$$\forall f \in M \quad (x + y, f) = (x, f) + (y, f) = 0,$$

а потому $x + y \in M^\perp$.

Аналогично для любого вектора $x \in M^\perp$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{K}$ выполнено

$$\forall f \in M \quad (\alpha x, f) = \alpha(x, f) = 0,$$

и значит $\alpha x \in M^\perp$. □

Теорема 6.3. Пусть E — конечномерное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, F — подпространство в E. Тогда существует единственное подпространство G в пространстве E, удовлетворяющее условиям

$$F \perp G, \quad F \oplus G = E.$$

При этом $G = F^{\perp} := \{g \in E : \forall f \in F \quad g \perp f\}$.

Доказательство. Проверим существование подпространства G. Выберем ортонормированный базис $\{f_k\}_{k=1}^{p}$ в подпространстве F. Достроим его до базиса в пространстве E и применим к полученному базису процедуру ортогонализации по Шмидту. Из определения ортогонализации по Шмидту вытекает, что первые p векторов отстанутся неизменными. Таким образом мы получим ортонормированный базис в пространстве E следующего вида

$$\{f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_{n-p}\}$$

Положим $G = \mathscr{L}\{g_1, \dots, g_{n-p}\}$. По построению подпространство G — искомое.

Проверим единственность подпространства G. Предположим найдутся два подпространства G_1, G_2, удовлетворяющие условиям

$$F \perp G_i, \quad F \oplus G_i = E, \quad i = 1, 2.$$

Для любого вектора $g \in G_2$ справедливо разложение ($g \in E = F \oplus G_1$)

$$g = f + g_1, \quad f \in F, \quad g_1 \in G_1.$$

Тогда выполнены равенства $0 = (g, f) = (f, f) + (g_1, f) = (f, f)$. Следовательно вектор f равен нулю, т.е. $g = g_1 \in G_1$. Таким образом $G_2 \subset G_1$. Аналогично получаем $G_1 \subset G_2$.

Проверим, наконец, равенство $G = F^{\perp} := \{g \in E : \forall f \in F \quad g \perp f\}$. По определению $G \perp F$, а потому $G \subset F^{\perp}$. Осталось проверить обратное включение. Для любого вектора $x \in F^{\perp}$ справедливо разложение

$$x = f + g, \quad f \in F, \quad g \in G.$$

Следовательно, имеют место равенства $0 = (x, f) = (f, f) + (g, f) = (f, f)$, а потому $f = \mathbb{O}$, и значит $x = g \in G$. □

Опр. Пусть E — конечномерное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, F, G — подпространства в E, удовлетворяющие условиям

$$F \perp G, \quad F \oplus G = E.$$

Тогда подпространство $G = F^{\perp}$ называется ортогональным дополнением к подпространству F в евклидовом пространстве E.

Свойства.

1) $E^{\perp} = \{\mathbb{O}\}$;
2) $\{\mathbb{O}\}^{\perp} = E$;
3) $G = F^{\perp} \Leftrightarrow F = G^{\perp}$;
4) $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Примеры.

1) Пусть в пространстве выделена точка O; $E = E_3$ — пространство радиус-векторов с началом в точке O. Пусть l — прямая, проходящая через точку O, α — плоскость перпендикулярная прямой l и проходящая через точку O; $F = E_l$ — подпространство радиус векторов, лежащих на прямой l; $G = E_\alpha$ — подпространство радиус векторов, лежащих на плоскости α. Тогда $F \perp G$; $F \oplus G = E$; таким образом $E_\alpha^\perp = E_l$.
2) Пусть задано стандартное вещественное евклидово пространство $E = \mathbb{R}^3$; $F = \mathscr{L}\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$, $G = \mathscr{L}\{\vec{g}_0\}$, где $\vec{f}_1 = (1,1,1)^t$, $\vec{f}_2 = (1,-1,1)^t$, $\vec{g}_0 = (1,0,-1)^t$. Тогда $F \perp G$, следовательно, $\dim F \oplus G = 3$, а потому $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. Таким образом $G^\perp = F$, $F^\perp = G$.

Опр. Пусть E — конечномерное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, F — подпространство в E. Тогда для всякого $x \in E$ существует единственное разложение

$$x = f + g, \quad f \in F, \quad g \in F^\perp.$$

Определим отображение $P : E \to E$ равенством $Px = f$. Отображение P называется ортогональным проектором на подпространство F.

Свойства.

1) P — линейный оператор.

   Доказательство. Пусть векторы $x, y \in E$ имеют представления

   $$x = f_1 + g_1, \quad y = f_2 + g_2.$$

   Тогда при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ справедливо равенство

   $$\alpha x + \beta y = (\alpha f_1 + \beta f_2) + (\alpha g_1 + \beta g_2);$$

   при этом $\alpha f_1 + \beta f_2 \in F$, $\alpha g_1 + \beta g_2 \in G$. Таким образом справедливо равенство

   $$P(\alpha x + \beta y) = \alpha f_1 + \beta f_2 = \alpha Px + \beta Py.$$

   □

2) $\mathrm{Ran} P = F$, $P^2 = P$.

   Доказательство. Для любого вектора $f \in F$ справедливо разложение

   $$f = f + \mathbb{O}, \quad f \in F, \quad \mathbb{O} \in G.$$

   Следовательно, верно равенство $Pf = f$. Таким образом, во-первых $\mathrm{Ran} P = F$; во-вторых при всех $x \in E$ выполнено

   $$P^2 x = P(Px) = Px, \quad \text{т.к.} \quad Px \in F.$$

   □

3) $(Px, y) = (y, Px)$, $x, y \in E$.

   Доказательство. Для любых векторов $x, y \in E$ справедливы разложения

   $$x = f_1 + g_1, \quad y = f_2 + g_2.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$(Px, y) = (f_1, f_2 + g_2) = (f_1, f_2) + (f_1, g_2) = (f_1, f_2) = (f_1 + g_1, f_2) = (x, Py).$$

$\square$

4) $Pf = f \Leftrightarrow f \in F$.

Доказательство. Это прямое следствие свойства 2. $\square$

5) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2$.

Доказательство. Это следствие разложения $x = Px + (x - Px)$ и теоремы Пифагора, т.к. $x \perp (x - Px)$. $\square$

6) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^p$ — ортонормированный базис в подпространстве F. Тогда справедливо равенство

$$Px = \sum_{k=1}^{p} (x, e_k) e_k, \quad x \in E.$$

Доказательство. Дополним набор $\{e_k\}_{k=1}^p$ до ортонормированного базиса

$$\{e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_q\}$$

в пространстве E (о возможности этого см. доказательство теоремы 6.3). Тогда для всякого вектора $x \in E$ справедливо разложение

$$x = (x, e_1)e_1 + \ldots + (x, e_p)e_p + (x, g_1)g_1 + \ldots + (x, g_q)g_q.$$

При этом верны включения

$$f := (x, e_1)e_1 + \ldots + (x, e_p)e_p \in F, \quad g := (x, g_1)g_1 + \ldots + (x, g_q)g_q \in G.$$

Таким образом $Px = f$. $\square$

Пример. Пусть в пространстве выделена точка O; $E = E_3$ — пространство радиус-векторов с началом в точке O; $\vec{j} \neq \vec{0}$ произвольный вектор, $F = \mathscr{L}\{\vec{j}\}$, P — ортогональный проектор на подпространство F. Тогда $P\vec{x} = K_{\vec{j}}\vec{x}$ — компонента вектора по оси, сонаправленной вектору $\vec{j}$.

§7. Ортогональная сумма подпространств в стандартном евклидовом пространстве. Ортогональное дополнение

Здесь мы для полноты изложения повторим наши рассуждения об ортогональной сумме подпространств и ортогональных дополнениях в случае стандартного евклидова пространства $\mathbb{K}^n$ со стандартным скалярным произведением.

1. Ортогональная сумма подпространств в стандартном евклидовом пространстве.

Опр. Пусть F — подпространство в $\mathbb{K}^n$, $\vec{g} \in \mathbb{K}^n$. Будем говорить, что вектор $\vec{g}$ ортогонален подпространству F ($\vec{g} \perp F$), если вектор $\vec{g}$ ортогонален каждому вектору из подпространства F.

Опр. Пусть F, G — подпространства в $\mathbb{K}^n$. Будем говорить что подпространства F и G ортогональны, если

$$\forall \vec{f} \in F,\ \vec{g} \in G \quad \vec{f} \perp \vec{g}.$$

Пример. Пусть $F = \mathscr{L}\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$, $G = \mathscr{L}\{\vec{g}_0\}$, где $\vec{f}_1 = (1,1,1)^t$, $\vec{f}_2 = (1,-1,1)^t$, $\vec{g}_0 = (1,0,-1)^t$. Тогда $F \perp G$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что выполнены соотношения $\vec{g}_0 \perp \vec{f}_1$, $\vec{g}_0 \perp \vec{f}_2$. Следовательно, для любых векторов $\vec{f} = \alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2 \in F$, $\vec{g} = \gamma\vec{g}_0 \in G$ справедливо равенство

$$(\vec{f}, \vec{g}) = \alpha\gamma(f_1, g_0) + \beta\gamma(\vec{f}_2, \vec{g}_0) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \vec{f} \perp \vec{g}.$$

□

Свойство. Пусть F, G — подпространства в $\mathbb{K}^n$, $F \perp G$. Тогда $F \cap G = \{\mathbb{O}\}$.

Доказательство. Пусть некоторый вектор $\vec{x}$ принадлежит пересечению подпространств F и G. Следовательно $\vec{x} \in F$, $\vec{x} \in G$, а потому $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, и значит $\vec{x} = \vec{0}$. □

Теорема 7.1. Пусть $F_1, \dots, F_p$ — подпространства в $\mathbb{K}^n$; $F_i \perp F_j$ при $i \neq j$. Тогда сумма подпространств $F_1 + \dots + F_p$ — прямая.

Доказательство. Предположим, что вектор $\vec{x} \in F_1 + \dots + F_p$ имеет два представления

$$\vec{x} = \vec{f}_1 + \dots + \vec{f}_p = \vec{h}_1 + \dots + \vec{h}_p, \quad \vec{f}_1, \vec{h}_1 \in F_1, \dots, \vec{f}_p, \vec{h}_p \in F_p.$$

Тогда справедливо равенство

$$(\vec{f}_1 - \vec{h}_1) + \dots + (\vec{f}_p - \vec{h}_p) = \vec{0}.$$

Умножая скалярно последнее равенство на вектор $\vec{f}_j - \vec{h}_j$ и пользуясь соотношением

$$(\vec{f}_j - \vec{h}_j, \vec{f}_k - \vec{h}_k) = 0, \quad \text{при} \quad j \neq k,$$

получим равенство $(\vec{f}_j - \vec{h}_j, \vec{f}_j - \vec{h}_j) = 0$, откуда и следует $\vec{f}_j = \vec{h}_j$ при любом $j = 1, \dots, p$. □

Опр. Пусть $F_1, \dots, F_p$ — подпространства в $\mathbb{K}^n$; $F_i \perp F_j$ при $i \neq j$. Тогда сумма подпространств $F_1 + \dots + F_p$ называется ортогонольной суммой и обозначается $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Теорема 7.2. Пусть $F_1, \dots, F_p$ — подпространства в $\mathbb{K}^n$; $F_i \perp F_j$ при $i \neq j$. Тогда объединение ортонормированных базисов подпространств $F_1, \dots, F_p$ является ортонормированным базисом в $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Доказательство. Объединение базисов подпространств $F_1, \dots, F_p$ является базисом в прямой сумме $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Остается проверить что полученный базис ортонормированный. По построению все векторы базиса единичной длины. Если два вектора базиса принадлежат одному подпространству, то они ортогональны, т.к. исходные базисы были ортонормированы; если два вектора базиса принадлежат разным подпространствам, то они ортогональны, т.к. подпространства ортогональны. □

2. Ортогональное дополнение подпространства в стандартном евклидовом пространстве.

Свойство. Пусть $M \subset \mathbb{K}^n$— некоторое подмножество пространства $\mathbb{K}^n$. Тогда множество $M^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n : \forall \vec{f} \in M \quad \vec{x} \perp \vec{f}\}$ является подпространством в $\mathbb{K}^n$.

Доказательство. Для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in M^\perp$ справедливо равенство

$$\forall \vec{f} \in M \quad (\vec{x} + \vec{y}, \vec{f}) = (\vec{x}, \vec{f}) + (\vec{y}, \vec{f}) = 0,$$

а потому $\vec{x} + \vec{y} \in M^\perp$.

Аналогично для любого вектора $\vec{x} \in M^\perp$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{K}$ выполнено

$$\forall \vec{f} \in M \quad (\alpha\vec{x}, \vec{f}) = \alpha(\vec{x}, \vec{f}) = 0,$$

и значит $\alpha\vec{x} \in M^\perp$. □

Теорема 7.3. Пусть F — подпространство в $\mathbb{K}^n$. Тогда существует единственное подпространство G в пространстве $\mathbb{K}^n$, удовлетворяющее условиям

$$F \perp G, \quad F \oplus G = \mathbb{K}^n.$$

При этом $G = F^\perp := \{\vec{g} \in \mathbb{K}^n : \forall \vec{f} \in F \quad \vec{g} \perp \vec{f}\}$.

Доказательство. Проверим существование подпространства G. Выберем ортонормированный базис $\{\vec{f}_k\}_{k=1}^p$ в подпространстве F. Достроим его до базиса в пространстве $\mathbb{K}^n$ и применим к полученному базису процедуру ортогонализации по Шмидту. Из определения ортогонализации по Шмидту вытекает, что первые p векторов отстанутся неизменными. Таким образом мы получим ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{K}^n$ следующего вида

$$\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_{n-p}\}$$

Положим $G = \mathscr{L}\{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_{n-p}\}$. По построению подпространство G — искомое.

Проверим единственность подпространства G. Предположим найдутся два подпространства G_1, G_2, удовлетворяющие условиям

$$F \perp G_i, \quad F \oplus G_i = \mathbb{K}^n, \quad i = 1, 2.$$

Для любого вектора $\vec{g} \in G_2$ справедливо разложение ($\vec{g} \in \mathbb{K}^n = F \oplus G_1$)

$$\vec{g} = \vec{f} + \vec{g}_1, \quad \vec{f} \in F, \quad \vec{g}_1 \in G_1.$$

Тогда выполнены равенства $0 = (\vec{g}, \vec{f}) = (\vec{f}, \vec{f}) + (\vec{g}_1, \vec{f}) = (\vec{f}, \vec{f})$. Следовательно вектор $\vec{f}$ равен нулю, т.е. $\vec{g} = \vec{g}_1 \in G_1$. Таким образом $G_2 \subset G_1$. Аналогично получаем $G_1 \subset G_2$.

Проверим, наконец, равенство $G = F^\perp := \{\vec{g} \in \mathbb{K}^n : \forall \vec{f} \in F \quad \vec{g} \perp \vec{f}\}$. По определению $G \perp F$, а потому $G \subset F^\perp$. Осталось проверить обратное включение. Для любого вектора $\vec{x} \in F^\perp$ справедливо разложение

$$\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}, \quad \vec{f} \in F, \quad \vec{g} \in G.$$

Следовательно, имеют место равенства $0 = (\vec{x}, \vec{f}) = (\vec{f}, \vec{f}) + (\vec{g}, \vec{f}) = (\vec{f}, \vec{f})$, а потому $\vec{f} = \vec{0}$, и значит $\vec{x} = \vec{g} \in G$. □

Опр. Пусть F, G — подпространства в $\mathbb{K}^n$, удовлетворяющие условиям

$$F \perp G, \quad F \oplus G = \mathbb{K}^n.$$

Тогда подпространство $G = F^{\perp}$ называется ортогональным дополнением к подпространству F в евклидовом пространстве $\mathbb{K}^n$.

Свойства.

1) $(\mathbb{K}^n)^{\perp} = \{\vec{0}\}$;
2) $\{\vec{0}\}^{\perp} = \mathbb{K}^n$;
3) $G = F^{\perp} \Leftrightarrow F = G^{\perp}$;
4) $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Примеры. Пусть $F = \mathscr{L}\{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$, $G = \mathscr{L}\{\vec{g}_0\}$, где $\vec{f_1} = (1,1,1)^t$, $\vec{f_2} = (1,-1,1)^t$, $\vec{g}_0 = (1,0,-1)^t$. Тогда $F \perp G$, следовательно, $\dim F \oplus G = 3$, а потому $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. Таким образом $G^{\perp} = F$, $F^{\perp} = G$.