Краткий конспект лекции по курсу «Высшая алгебра» на 11.05.2020

§13. Симметричные операторы в конечномерном вещественном евклидовом пространстве

1. Собственные числа и собственные подпространства симметричного оператора в конечномерном вещественном евклидовом пространстве.

Теорема 13.1. Все собственные значения симметричного оператора в конечномерном вещественном евклидовом пространстве вещественны; геометрическая кратность каждого собственного числа симметричного оператора не меньше единицы; собственные подпространства симметричного оператора в конечномерном вещественном евклидовом пространстве попарно ортогональны.

Доказательство. Пусть E — конечномерное вещественное евклидово пространство, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t \in \Lambda(E)$,

$$\sigma(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \end{pmatrix}.$$

Выберем ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в пространстве E. Оператор $\mathbb{A}$ изображается в паре базисов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ симметричной мотрицей A. При этом (см. лекцию от 30.03.2020, Гл. IV, §4, п.4, где изложена теория операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, однако те же результаты справедливы и для операторов в произвольном вещественном конечномерном пространстве) числа $\{\mu_j\}_{j=1}^p$ являются собственными числами матрицы A. По следствию 12.4 (см. лекцию от 07.05.2020, Гл. V, §12, п.1) все числа $\{\mu_j\}_{j=1}^p$ вещественны. Следовательно, каждому собственному числу (см. лекцию от 30.03.2020, Гл. IV, §4, п.4) отвечает хотя бы один ненулевой собственный вектор, и значит соответствующее собственное подпространство — ненулевое.

Пусть μ_i, μ_j — два различных собственных значения оператора $\mathbb{A}$ (в этом случае хотя бы одно из них не равно нулю, предположим, например, $\mu_j \neq 0$); $f \in F_{\mu_i}$, $g \in F_{\mu_j}$. Тогда справедливы равенства

$$(g, f) = \frac{1}{\mu_j}(\mathbb{A}g, f) = \frac{1}{\mu_j}(g, \mathbb{A}^t f) = \frac{1}{\mu_j}(g, \mathbb{A}f) = \frac{\mu_i}{\mu_j}(g, f) = \frac{\mu_i}{\mu_j}(g, f).$$

Таким образом, верно равенство

$$(g, f) = \frac{\mu_i}{\mu_j}(g, f).$$

Следовательно, поскольку $\frac{\mu_i}{\mu_j} \neq 1$, справедливо соотношение $(g, f) = 0$, т.е. $F_{\mu_j} \perp F_{\mu_i}$. $\square$

2. Инвариантные и приводящие подпространства линейного оператора. Весь материал этого пункта совершенно аналогичен материалу п.2 параграфа 12 (см. лекцию от 07.05.2020).

Опр. Пусть E — конечномерное вещественное евклидово пространство, $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$, F — подпространство в E. Говорят, что подпространство F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$, если выполнено условие $\forall f \in F \quad \mathbb{A}f \in F$. Иногда говорят, что F инвариантно относительно оператора $\mathbb{A}$.

Опр. Пусть E — конечномерное вещественное евклидово пространство, $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$, F — подпространство в E. Говорят, что подпространство F — приводящее подпространство оператора $\mathbb{A}$, если F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$ и $F^{\perp}$ — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$.

Опр. Пусть E — конечномерное вещественное евклидово пространство, $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$, F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$. Зададим отображение $\mathbb{A} \mid_F \colon F \to F$ формулой $\forall f \in F \quad \mathbb{A} \mid_F (f) = \mathbb{A}f$. Отображение $\mathbb{A} \mid_F$ называется сужением оператора $\mathbb{A}$ на подпространство F.

Упр. Проверьте, что отображение $\mathbb{A} \mid_F$ — линейный оператор.

Лемма 13.2. Пусть E — конечномерное вещественное евклидово пространство, $\mathbb{A} \in \Lambda(E)$, $\mathbb{A}f = \lambda f$, $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда подпространство $\mathscr{L}\{f\}$ инвариантно относительно $\mathbb{A}$.

Доказательство. Для любого $x \in \mathscr{L}\{f\}$ имеет место представление $x = \alpha f$. Следовательно, справедливы соотношения $\mathbb{A}x = \alpha \mathbb{A} f = \alpha\lambda f \in \mathscr{L}\{f\}$. □

Лемма 13.3. Пусть E — конечномерное вещественное евклидово пространство, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t \in \Lambda(E)$. Тогда всякое инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$ является приводящим подпространством оператора $\mathbb{A}$.

Доказательство. Пусть F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$. Необходимо проверить, что ортогональное дополнение $F^{\perp}$ к подпространству F является инвариантным подпространством оператора $\mathbb{A}$. В самом деле, для любого вектора $g \in F^{\perp}$ справедливы соотношения

$$\forall f \in F \quad (\mathbb{A}g, f) = (g, \mathbb{A}^t f) = (g, \mathbb{A}f) = 0, \quad \text{т.к.} \quad \mathbb{A}f \in F, \quad g \in F^{\perp}.$$

Таким образом, справедливо включение $\mathbb{A}g \in F^{\perp}$, т.е. $F^{\perp}$ — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$. □

3. Существование собственного ортонормированного базиса у симметричного оператора в конечномерном вещественном евклидовом пространстве.

Теорема 13.4. Пусть E — конечномерное вещественное евклидово пространство, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t \in \Lambda(E)$. Тогда существует ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в E, удовлетворяющий условию $\mathbb{A}e_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Выберем какое-нибудь собственное число оператора $\mathbb{A}$, обозначим его через λ_1 и найдем какой-нибудь собственный вектор e_1 отвечающий собственному числу λ_1 и удовлетворяющий условию $\|e_1\| = 1$ (такой вектор всегда найдется, см. лекцию от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.4, лемма 4.12). Для единообразия обозначим $E =: E_1$, $\mathbb{A} =: \mathbb{A}_1$. Далее рассмотрим подпространство $E_2 := \mathscr{L}\{e_1\}^{\perp}$. По леммам 13.2, 13.3 подпространство E_2 инвариантно относительно оператора $\mathbb{A}_1$. Рассмотрим оператор $\mathbb{A}_2 := \mathbb{A}_1 |_{E_2}$. Нетрудно видеть, что выполнены следующие равенства

$$\forall x, y \in E_2 \quad (\mathbb{A}_2 x, y) = (\mathbb{A}_1 x, y) = (x, \mathbb{A}_1^t y) = (x, \mathbb{A}_1 y) = (x, \mathbb{A}_2 y).$$

Таким образом оператор $\mathbb{A}_2 \in \Lambda(E_2)$ симметричен.

Повторим всю процедуру: выберем какое-нибудь собственное число оператора $\mathbb{A}_2$, обозначим его через λ_2 и найдем какой-нибудь собственный вектор $e_2 \in E_2$ $(e_2 \perp e_1)$ отвечающий собственному числу λ_2 и удовлетворяющий условию $\|e_2\| = 1$. Отметим сразу равенства $\mathbb{A}e_2 = \mathbb{A}_2 e_2 = \lambda_2 e_2$. В пространстве E_2 рассмотрим подпространство $E_3 := \mathscr{L}\{e_2\}^{\perp}$. По леммам 13.2, 13.3 подпространство E_3 инвариантно относительно оператора $\mathbb{A}_2$. Рассмотрим оператор $\mathbb{A}_3 := \mathbb{A}_2 |_{E_3}$. Как и выше оператор $\mathbb{A}_3 \in \Lambda(E_3)$ симметричен.

Далее, повторяя процедуру, получим ортонормированный набор $\{e_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяющий условию $\mathbb{A}e_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, \ldots, n$. $\square$

Из теорем 13.1, 13.4 и леммы 4.12 (лекция от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.4) вытекает следующий результат.

Теорема 13.5. Пусть E — конечномерное вещественное евклидово пространство, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t \in \Lambda(E)$,

$$\sigma(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \end{pmatrix}.$$

Тогда $\sigma_i = \tau_i$, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, $F_{\mu_1} \oplus \ldots \oplus F_{\mu_p} = E$.

§14. Симметричные операторы в стандартном вещественном евклидовом пространстве. Теорема о собственном базисе. Диагонализация симметричной матрицы

Здесь мы обсудим результаты параграфа 13 в частном случае стандартного вещественного евклидова пространства. Большую часть доказательств мы воспроизведем независимо от §13.

1. Собственные числа и собственные подпространства симметричного оператора в стандартном вещественном евклидовом пространстве.

Теорема 14.1. Все собственные значения симметричного оператора в стандартном вещественном евклидовом пространстве вещественны; геометрическая кратность каждого собственного числа симметричного оператора не меньше единицы; собственные подпространства симметричного оператора в стандартном вещественном евклидовом пространстве попарно ортогональны.

Доказательство. Пусть $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ — симметричная матрица; оператор $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t \in \Lambda(E)$ задан равенством $\mathbb{A}\vec{x} = A \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$;

$$\sigma(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \end{pmatrix}.$$

При этом (см. лекцию от 30.03.2020, Гл. IV, §4, п.4) числа $\{\mu_j\}_{j=1}^p$ являются собственными числами матрицы A. Все собственные числа симметричной матрицы A вещественны (это вытекает из следствия 12.4 (см. лекцию от 07.05.2020, Гл. V, §12, п.1), но на экзамене разрешается привести этот факт без доказательства). Следовательно, каждому собственному числу (см. лекцию от 30.03.2020, Гл. IV, §4, п.4) отвечает хотя бы один ненулевой собственный вектор, и значит соответствующее собственное подпространство — ненулевое.

Пусть μ_i, μ_j — два различных собственных значения оператора $\mathbb{A}$ (в этом случае хотя бы одно из них не равно нулю, предположим, например, $\mu_j \neq 0$); $\vec{f} \in F_{\mu_i}$, $\vec{g} \in F_{\mu_j}$. Тогда справедливы равенства

$$(\vec{g}, \vec{f}) = \frac{1}{\mu_j}(\mathbb{A}\vec{g}, \vec{f}) = \frac{1}{\mu_j}(\vec{g}, \mathbb{A}^t\vec{f}) = \frac{1}{\mu_j}(\vec{g}, \mathbb{A}\vec{f}) = \frac{\mu_i}{\mu_j}(\vec{g}, \vec{f}) = \frac{\mu_i}{\mu_j}(\vec{g}, \vec{f}).$$

Таким образом, верно равенство

$$(\vec{g}, \vec{f}) = \frac{\mu_i}{\mu_j}(\vec{g}, \vec{f}).$$

Следовательно, поскольку $\frac{\mu_i}{\mu_j} \neq 1$, справедливо соотношение $(\vec{g}, \vec{f}) = 0$, т.е. $F_{\mu_j} \perp F_{\mu_i}$. □

2. Инвариантные и приводящие подпространства линейного оператора. Весь материал этого пункта совершенно аналогичен материалу п.2 параграфа 12 (см. лекцию от 07.05.2020) и п. 2 §13.

Опр. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный оператор в стандартном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, F — подпространство в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что подпространство F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$, если выполнено условие $\forall \vec{f} \in F \quad \mathbb{A}\vec{f} \in F$. Иногда говорят, что F инвариантно относительно оператора $\mathbb{A}$.

Опр. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный оператор в стандартном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, F — подпространство в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что подпространство F — приводящее подпространство оператора $\mathbb{A}$, если F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$ и $F^\perp$ — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$.

Опр. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный оператор в стандартном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$. Зададим отображение $\mathbb{A}\,|_F \colon F \to F$ формулой $\forall \vec{f} \in F \quad \mathbb{A}\,|_F\,(\vec{f}) = \mathbb{A}\vec{f}$. Отображение $\mathbb{A}\,|_F$ называется сужением оператора $\mathbb{A}$ на подпространство F.

Упр. Проверьте, что отображение $\mathbb{A}\,|_F$ — линейный оператор.

Лемма 14.2. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный оператор в стандартном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{A}\vec{f} = \lambda\vec{f}$, $\vec{f} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда подпространство $\mathscr{L}\{\vec{f}\}$ инвариантно относительно $\mathbb{A}$.

Доказательство. Для любого $\vec{x} \in \mathscr{L}\{\vec{f}\}$ имеет место представление $\vec{x} = \alpha\vec{f}$. Следовательно, справедливы соотношения $\mathbb{A}\vec{x} = \alpha\mathbb{A}\vec{f} = \alpha\lambda\vec{f} \in \mathscr{L}\{\vec{f}\}$. □

Лемма 14.3. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный симметричный оператор в стандартном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда всякое инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$ является приводящим подпространством оператора $\mathbb{A}$.

Доказательство. Пусть F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$. Необходимо проверить, что ортогональное дополнение $F^{\perp}$ к подпространству F является инвариантным подпространством оператора $\mathbb{A}$. В самом деле, для любого вектора $\vec{g} \in F^{\perp}$ справедливы соотношения

$$\forall \vec{f} \in F \quad (\mathbb{A}\vec{g}, \vec{f}) = (\vec{g}, \mathbb{A}^t \vec{f}) = (\vec{g}, \mathbb{A}\vec{f}) = 0, \quad \text{т.к.} \quad \mathbb{A}\vec{f} \in F, \quad \vec{g} \in F^{\perp}.$$

Таким образом, справедливо включение $\mathbb{A}\vec{g} \in F^{\perp}$, т.е. $F^{\perp}$ — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$. □

3. Существование собственного ортонормированного базиса у симметричного оператора в стандартном вещественном евклидовом пространстве. Диагонализация симметричных матриц.

Теорема 14.4. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный симметричный оператор в стандартном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда существует ортонормированный базис $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условию $\mathbb{A}\vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Выберем какое-нибудь собственное число оператора $\mathbb{A}$, обозначим его через λ_1 и найдем какой-нибудь собственный вектор $\vec{e}_1$ отвечающий собственному числу λ_1 и удовлетворяющий условию $\|\vec{e}_1\| = 1$ (такой вектор всегда найдется, см. лекцию от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.4, лемма 4.12). Для единообразия обозначим $E =: E_1$, $\mathbb{A} =: \mathbb{A}_1$. Далее рассмотрим подпространство $E_2 := \mathscr{L}\{\vec{e}_1\}^{\perp}$. По леммам 14.2, 14.3 подпространство E_2 инвариантно относительно оператора $\mathbb{A}_1$. Рассмотрим оператор $\mathbb{A}_2 := \mathbb{A}_1 \mid_{E_2}$. Нетрудно видеть, что выполнены следующие равенства

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_2 \quad (\mathbb{A}_2\vec{x}, \vec{y}) = (\mathbb{A}_1\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \mathbb{A}_1^t \vec{y}) = (\vec{x}, \mathbb{A}_1\vec{y}) = (\vec{x}, \mathbb{A}_2\vec{y}).$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}_2 \in \Lambda(E_2)$ симметричен.

Повторим всю процедуру: выберем какое-нибудь собственное число оператора $\mathbb{A}_2$, обозначим его через λ_2 и найдем какой-нибудь собственный вектор $\vec{e}_2 \in E_2$ ($\vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$) отвечающий собственному числу λ_2 и удовлетворяющий условию $\|\vec{e}_2\| = 1$. Отметим сразу равенства $\mathbb{A}\vec{e}_2 = \mathbb{A}_2\vec{e}_2 = \lambda_2\vec{e}_2$. В пространстве E_2 рассмотрим подпространство $E_3 := \mathscr{L}\{\vec{e}_2\}^{\perp}$. По леммам 13.2, 13.3 (на экзамене разрешается сослаться на леммы 14.2 и 14.3, хотя это не совсем точно (подумайте почему)) подпространство E_3 инвариантно относительно оператора $\mathbb{A}_2$. Рассмотрим оператор $\mathbb{A}_3 := \mathbb{A}_2 \mid_{E_3}$. Как и выше оператор $\mathbb{A}_3 \in \Lambda(E_3)$ симметричен.

Далее, повторяя процедуру, получим ортонормированный набор $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяющий условию $\mathbb{A}\vec{e}_k = \lambda_k\vec{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$. □

Из теорем 14.1, 14.4 и леммы 4.12 (лекция от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.4) вытекает следующий результат.

Теорема 14.5. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный симметричный оператор в стандартном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$;

$$\sigma(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \end{pmatrix}.$$

Тогда $\sigma_i = \tau_i$, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, $F_{\mu_1} \oplus \ldots \oplus F_{\mu_p} = \mathbb{R}^n$.

Из теорем 14.5 и 5.4 (см. лекцию от 02.04.2020, Гл.IV, §5, п.2) немедленно вытекает следующий результат.

Теорема 14.6. Пусть $A = A^t \in M^{n,n}(\mathbb{R})$. Тогда A диагонализуема в классе вещественных матриц и матрица, осуществляющая подобие матрицы A с диагональной может быть выбрана ортогональной.

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный симметричный оператор в стандартном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, заданный равенством $\mathbb{A}\vec{x} = A \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{A}\vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k$, матрица T составлена из векторов-столбцов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$: $T = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$. Тогда по теореме 5.4 (см. лекцию от 02.04.2020, Гл.IV, §5, п.2) справедливо соотношение

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ортогональность матрицы T очевидна. $\square$

§15. Самосопряженные и унитарные операторы в стандартном комплексном евклидовом пространстве

1. Собственные числа и собственные подпространства самосопряженного оператора в стандартном комплексном евклидовом пространстве.

Лемма 15.1. Пусть $\mathbb{A}$ самосопряженный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда при всех $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ справедливо включение $(\mathbb{A}\vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{R}$.

Доказательство. $(\mathbb{A}\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}, \mathbb{A}^*\vec{x}) = (\vec{x}, \mathbb{A}\vec{x}) = \overline{(\mathbb{A}\vec{x}, \vec{x})}$. $\square$

Теорема 15.2. Все собственные значения самосопряженного оператора в стандартном комплексном евклидовом пространстве вещественны; собственные подпространства самосопряженного оператора в стандартном комплексном евклидовом пространстве попарно ортогональны.

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}$ самосопряженный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$,

$$\sigma(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p \\ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p \end{pmatrix}.$$

При всяком μ_j, $j = 1, \dots, p$, выберем $\vec{f} \in F_{\mu_j} \setminus \{\vec{0}\}$ — собственный вектор, отвечающий собственному числу μ_j. Тогда справедливы соотношения

$$\mathbb{R} \ni \frac{(\mathbb{A}\vec{f}, \vec{f})}{\|\vec{f}\|^2} = \frac{(\mu_j \vec{f}, \vec{f})}{\|\vec{f}\|^2} = \frac{\mu_j(\vec{f}, \vec{f})}{\|\vec{f}\|^2} = \mu_j.$$

Пусть μ_i, μ_j — два различных собственных значения оператора $\mathbb{A}$ (в этом случае хотя бы одно из них не равно нулю, предположим, например, $\mu_j \neq 0$); $\vec{f} \in F_{\mu_i}$, $\vec{g} \in F_{\mu_j}$. Тогда справедливы равенства

$$(\vec{g}, \vec{f}) = \frac{1}{\mu_j}(\mathbb{A}\vec{g}, f) = \frac{1}{\mu_j}(\vec{g}, \mathbb{A}^*\vec{f}) = \frac{1}{\mu_j}(\vec{g}, \mathbb{A}\vec{f}) = \frac{\overline{\mu_i}}{\mu_j}(\vec{g}, \vec{f}) = \frac{\mu_i}{\mu_j}(\vec{g}, \vec{f}).$$

Таким образом, верно равенство

$$(\vec{g}, \vec{f}) = \frac{\mu_i}{\mu_j}(\vec{g}, \vec{f}).$$

Следовательно, поскольку $\frac{\mu_i}{\mu_j} \neq 1$, справедливо соотношение $(\vec{g}, \vec{f}) = 0$, т.е. $F_{\mu_j} \perp F_{\mu_i}$. □

Напомним, что для произвольной матрицы $A = A^* \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ заданный ею оператора $\mathbb{A}\vec{x} = A \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, самосопряжен. Также вспомним, что вещественная симметричная матрица является самосопряженной. Из теоремы 15.2 и теоремы 4.4 (лекция от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.2) вытекают следующие утверждения.

Следствие 15.3. Все собственные числа самосопряженной матрицы вещественны.

Следствие 15.4. Все собственные числа вещественной симметричной матрицы вещественны.

2. Инвариантные и приводящие подпространства линейного оператора.

Опр. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, F — подпространство в $\mathbb{C}^n$. Говорят, что подпространство F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$, если выполнено условие $\forall \vec{f} \in F \quad \mathbb{A}\vec{f} \in F$. Иногда говорят, что F инвариантно относительно оператора $\mathbb{A}$.

Опр. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, F — подпространство в $\mathbb{C}^n$. Говорят, что подпространство F — приводящее подпространство оператора $\mathbb{A}$, если F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$ и $F^\perp$ — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$.

Опр. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$. Зададим отображение $\mathbb{A}\mid_F \colon F \to F$ формулой $\forall f \in F \quad \mathbb{A}\mid_F (f) = \mathbb{A}f$. Отображение $\mathbb{A}\mid_F$ называется сужением оператора $\mathbb{A}$ на подпространство F.

Упр. Проверьте, что отображение $\mathbb{A}\mid_F$ — линейный оператор.

Лемма 15.5. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{A}\vec{f} = \lambda\vec{f}$, $\vec{f} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда подпространство $\mathscr{L}\{\vec{f}\}$ инвариантно относительно $\mathbb{A}$.

Доказательство. Для любого $\vec{x} \in \mathscr{L}\{\vec{f}\}$ имеет место представление $\vec{x} = \alpha\vec{f}$. Следовательно, справедливы соотношения $\mathbb{A}\vec{x} = \alpha\mathbb{A}\vec{f} = \alpha\lambda\vec{f} \in \mathscr{L}\{\vec{f}\}$. □

Лемма 15.6. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный самосопряженный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда всякое инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$ является приводящим подпространством оператора $\mathbb{A}$.

Доказательство. Пусть F — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$. Необходимо проверить, что ортогональное дополнение $F^\perp$ к подпространству F является инвариантным подпространством оператора $\mathbb{A}$. В самом деле, для любого вектора $\vec{g} \in F^\perp$ справедливы соотношения

$$\forall \vec{f} \in F \quad (\mathbb{A}\vec{g}, f) = (\vec{g}, \mathbb{A}^* \vec{f}) = (\vec{g}, \mathbb{A}\vec{f}) = 0, \quad \text{т.к.} \quad \mathbb{A}\vec{f} \in F, \quad \vec{g} \in F^\perp.$$

Таким образом, справедливо включение $\mathbb{A}\vec{g} \in F^\perp$, т.е. $F^\perp$ — инвариантное подпространство оператора $\mathbb{A}$. □

3. Существование собственного ортонормированного базиса у самосопряженного оператора в стандартном комплексном евклидовом пространстве. Диагонализация самосопряженных матриц.

Теорема 15.7. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный самосопряженный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда существует ортонормированный базис $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющий условию $\mathbb{A}\vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Выберем какое-нибудь собственное число оператора $\mathbb{A}$, обозначим его через λ_1 и найдем какой-нибудь собственный вектор $\vec{e}_1$ отвечающий собственному числу λ_1 и удовлетворяющий условию $\|\vec{e}_1\| = 1$ (такой вектор всегда найдется, см. лекцию от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.2, теоремы 4.4, 4.5). Для единообразия обозначим $E =: E_1$, $\mathbb{A} =: \mathbb{A}_1$. Далее рассмотрим подпространство $E_2 := \mathscr{L}\{\vec{e}_1\}^\perp$. По леммам 15.5, 15.6 подпространство E_2 инвариантно относительно оператора $\mathbb{A}_1$. Рассмотрим оператор $\mathbb{A}_2 := \mathbb{A}_1 |_{E_2}$. Нетрудно видеть, что выполнены следующие равенства

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_2 \quad (\mathbb{A}_2\vec{x}, \vec{y}) = (\mathbb{A}_1\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \mathbb{A}_1^*\vec{y}) = (\vec{x}, \mathbb{A}_1\vec{y}) = (\vec{x}, \mathbb{A}_2\vec{y}).$$

Таким образом оператор $\mathbb{A}_2 \in \Lambda(E_2)$ самосопряжен.

Повторим всю процедуру: выберем какое-нибудь собственное число оператора $\mathbb{A}_2$, обозначим его через λ_2 и найдем какой-нибудь собственный вектор $\vec{e}_2 \in E_2$ ($\vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$) отвечающий собственному числу λ_2 и удовлетворяющий условию $\|\vec{e}_2\| = 1$. Отметим сразу равенства $\mathbb{A}\vec{e}_2 = \mathbb{A}_2\vec{e}_2 = \lambda_2\vec{e}_2$. В пространстве E_2 рассмотрим подпространство $E_3 := \mathscr{L}\{\vec{e}_2\}^\perp$. По леммам 12.5, 12.6 (на экзамене разрешается сослаться на леммы 15.5 и 15.6, хотя на самом деле это не совсем верно) подпространство E_3 инвариантно относительно оператора $\mathbb{A}_2$. Рассмотрим оператор $\mathbb{A}_3 := \mathbb{A}_2 |_{E_3}$. Как и выше оператор $\mathbb{A}_3 \in \Lambda(E_3)$ самосопряжен.

Далее, повторяя процедуру, получим ортонормированный набор $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяющий условию $\mathbb{A}\vec{e}_k = \lambda_k\vec{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$. □

Из теорем 15.2, 15.7 и 4.5 (лекция от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.2) вытекает следующий результат.

Теорема 15.8. Пусть E — конечномерное комплексное евклидово пространство, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^* \in \Lambda(E)$,

$$\sigma(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \end{pmatrix}.$$

Тогда $\sigma_i = \tau_i$, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, $F_{\mu_1} \oplus \ldots \oplus F_{\mu_p} = \mathbb{C}^n$.

Из теоремы 15.8 и теоремы 5.4 (см. лекцию от 02.04.2020, Гл.IV, §5, п.2) немедленно вытекает следующий результат.

Теорема 15.9. Пусть $A = A^* \in M^{n,n}(\mathbb{C})$. Тогда A диагонализуема в классе комплексных матриц и матрица, осуществляющая подобие матрицы A с диагональной может быть выбрана унитарной.

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}$ — линейный самосопряженный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, заданный равенством $\mathbb{A}\vec{x} = A \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$. Пусть $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{A}\vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k$, матрица U составлена из векторов-столбцов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$: $U = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$. Тогда по теореме 5.4 (см. лекцию от 02.04.2020, Гл.IV, §5, п.2) справедливо соотношение

$$U^{-1}AU = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Унитарность матрицы U очевидна. □

4. Собственные числа и собственные подпространства унитарного оператора в стандартном комплексном евклидовом пространстве.

Теорема 15.10. Все собственные значения унитарного оператора в стандартном комплексном евклидовом пространстве имеют модуль равный единице; собственные подпространства унитарного оператора в конечномерном комплексном евклидовом пространстве попарно ортогональны.

Доказательство. Пусть $\mathbb{U}$ — унитарный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$;

$$\sigma(\mathbb{U}) = \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p \\ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p \end{pmatrix}.$$

При всяком μ_j, $j = 1, \dots, p$, выберем $\vec{f} \in F_{\mu_j} \setminus \{\vec{0}\}$ — собственный вектор, отвечающий собственному числу μ_j. Тогда справедливы соотношения

$$1 = \frac{(\mathbb{U}\vec{f}, \mathbb{U}\vec{f})}{\|\vec{f}\|^2} = \frac{(\mu_j \vec{f}, \mu_j \vec{f})}{\|\vec{f}\|^2} = \frac{\mu_j \overline{\mu_j} (\vec{f}, \vec{f})}{\|\vec{f}\|^2} = |\mu_j|^2.$$

Отметим, что для комплексных чисел, равных единице по модулю, справедливы соотношения:

$$|z| = 1 \Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}.$$

Пусть μ_i, μ_j — два различных собственных значения оператора $\mathbb{U}$; $\vec{f} \in F_{\mu_i}$, $\vec{g} \in F_{\mu_j}$. Тогда справедливы равенства

$$(\vec{f}, \vec{g}) = (\mathbb{U}\vec{f}, \mathbb{U}\vec{g}) = (\mu_i \vec{f}, \mu_j \vec{g}) = \mu_i \overline{\mu_j} (\vec{f}, \vec{g}) = \frac{\mu_i}{\mu_j} (\vec{f}, \vec{g}).$$

Таким образом, верно равенство

$$(\vec{f}, \vec{g}) = \frac{\mu_i}{\mu_j} (\vec{f}, \vec{g}).$$

Следовательно, поскольку $\frac{\mu_i}{\mu_j} \neq 1$, справедливо соотношение $(\vec{f}, \vec{g}) = 0$, т.е. $F_{\mu_i} \perp F_{\mu_j}$. □

Напомним, что унитарный оператор $\mathbb{U}$ в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$ задается унитарной матрицей $U \in M^{n,n}(\mathbb{C})$: $\mathbb{U}\vec{x} = U \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$. Также вспомним, что вещественная ортогональная матрица является унитарной. Из теоремы 15.10 и теоремы 4.4 (лекция от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.2) вытекают следующие утверждения.

Следствие 15.11. Все собственные числа унитарной матрицы равны единице по модулю.

Следствие 15.12. Все собственные числа вещественной ортогональной матрицы равны единице по модулю.

5. Существование собственного ортонормированного базиса у унитарного оператора в стандартном комплексном евклидовом пространстве. Диагонализация унитарной и вещественной ортогональной матриц.

Теорема 15.13. Пусть $\mathbb{U}$ — унитарный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда существует ортонормированный базис $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющий условию $\mathbb{U}\vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Эту теорему мы приведем без доказательства. □

Из теорем 15.10, 15.13 и 4.5 (лекция от 30.03.2020, Глава IV, §4, п.2) вытекает следующий результат.

Теорема 15.14. Пусть $\mathbb{U}$ — унитарный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$,

$$\sigma(\mathbb{U}) = \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \end{pmatrix}.$$

Тогда $\sigma_i = \tau_i$, $|\mu_i| = 1$, $i = 1, \ldots, p$, $F_{\mu_1} \oplus \ldots \oplus F_{\mu_p} = \mathbb{C}^n$.

Из теоремы 15.14 и теоремы 5.4 (см. лекцию от 02.04.2020, Гл.IV, §5, п.2) немедленно вытекает следующий результат.

Теорема 15.15. Пусть $U \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ — унитарная матрица. Тогда U диагонализуема в классе комплексных матриц и матрица, осуществляющая подобие матрицы U с диагональной, может быть выбрана унитарной.

Доказательство. Пусть $\mathbb{U}$ — линейный унитарный оператор в стандартном комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, заданный равенством $\mathbb{U}\vec{x} = U \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$. Пусть $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{U}\vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k$, матрица X составлена из векторов-столбцов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$: $X = (\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n)$. Тогда по теореме 5.4 (см. лекцию от 02.04.2020, Гл.IV, §5, п.2) справедливо соотношение

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Унитарность матрицы X очевидна. □

Следствие 15.16. Пусть $T \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ — вещественная ортогональная матрица. Тогда T диагонализуема в классе комплексных матриц и матрица, осуществляющая подобие матрицы T с диагональной, может быть выбрана унитарной.

Доказательство. Следствие очевидно, поскольку всякая вещественная ортогональная матрица является унитарной. □