Неравенства Харди

Доклад носит учебный характер. Мы докажем классическое неравенство Харди

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x|^2}|u(x)|^2 dx \leqslant C(d) \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2 dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad d \geqslant 3; \tag{1}$$

найдем точную константу $C(d)$. Кроме того, мы обсудим модификации оценки (1) для случая малых размерностей $d = 1$ и $d = 2$.

Далее мы поговорим о классах весов Харди $HW(d)$. Весом Харди из класса $HW(d)$, $d \geqslant 1$, называется неотрицательный потенциал $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, обладающий свойством

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} V(x)|u(x)|^2 dx \leqslant M(V) \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2 dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{2}$$

Мы обсудим некоторые приложения оценки (2) к спектральной теории оператора Шредингера; исследуем необходимые и достаточные условия принадлежности неотрицательного потенциала к весам Харди. Ответ будет дан в терминах так называемой емкости. Простые достаточные условия принадлежности потенциала к весам Харди связаны с оценками типа Цвикеля. Отдельно мы рассмотрим случай однородного неотрицательного веса порядка -2.