

## Список вопросов к экзамену по функциональному анализу

1. Метрическое пространство: основные свойства, примеры. Сходимость в метрическом пространстве; открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве; непрерывность; полнота метрического пространства.
2. Определение и примеры топологического пространства. Основные понятия.
3. Хаусдорфовы, регулярные и нормальные топологические пространства.
4. Сходимость и непрерывность в топологическом пространстве.
5. Определение и примеры нормированного пространства. Банахово пространство.
6. Линейные оболочки в нормированном пространстве. Фактор-пространство.
7. Пространства последовательностей  $s, l_\infty, c_0, c$ .
8. Неравенства Юнга, Гельдера и Минковского для последовательностей. Пространства  $l_p, p \in [1, +\infty)$ .
9. Пространство ограниченных функций. Пространство ограниченных и непрерывных функций.
10. Пространство дифференцируемых функций. Класс Шварца.
11. Пространство голоморфных функций.
12. Измеримые функции: определение, примеры, простейшие свойства.
13. Пространство измеримых функций  $S(\mathcal{X}, d\rho)$ : определение, простейшие свойства, метрика, сходимость, полнота.
14. Пространство  $L_\infty(\mathcal{X}, d\rho)$ .
15. Интегральные неравенства Гельдера и Минковского, пространство  $L_p(\mathcal{X}, d\rho), p \in [1, +\infty)$ .
16. Сепарабельность абстрактного метрического пространства (определение, признаки).
17. Сепарабельность пространств  $\mathbb{K}^d, c_0, c$  и  $l_p, p \in [1, +\infty)$ . Сепарабельность  $C[a, b]$ . Несепарабельность пространства  $l_\infty$ .
18. Сепарабельность пространства  $L_p, p \in [1, +\infty)$ ; несепарабельность пространства  $L_\infty(0, 1)$ .
19. Плотность  $C_0^\infty(\Omega)$  в  $L_p(\Omega)$ .
20. Изоморфность метрических и нормированных пространств. Пополнение метрического и нормированного пространств (определение и единственность).
21. Существование пополнения метрического пространства.
22. Существование пополнения нормированного пространства.
23. Лемма о вложенных шарах.
24. Теорема Бэра-Хаусдорфа.
25. Бикомпактность и секвенциальная компактность в топологическом пространстве.
26. Бикомпактность и секвенциальная компактность в метрическом пространстве.
27. Прекомпактность в метрических пространствах. Теорема Хаусдорфа.
28. Прекомпактность в банаховых пространствах. Лемма о почти перпендикуляре. Непрекомпактность единичного шара в бесконечномерном банаховом пространстве.
29. Простейшие признаки прекомпактности в абстрактном метрическом пространстве.
30. Прекомпактность в  $c_0, c, l_p$  (теоремы типа Арцела).
31. Прекомпактность в  $C[a, b]$  (теорема Арцела-Асколи).
32. Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах. Пространство  $\mathcal{L}(E, F)$ .
33. Банаховость пространства  $\mathcal{L}(E, F)$ .
34. Распространение линейного ограниченного оператора по непрерывности.
35. Оператор умножения на функцию.
36. «Правильные» интегральные операторы. Лемма Шура. Операторы Гильберта-Шмидта.
37. Преобразование Фурье.
38. Принцип равномерной ограниченности (первый принцип функционального анализа).
39. Сильная сходимость. Теорема Банаха-Штейнгауза.
40. Оператор сдвига в  $L_p(\mathbb{R}^d), p \in [1, +\infty]$ .
41. Оператор сдвига в  $L_p(\Omega), p \in [1, +\infty]$ .
42. Ядро усреднения. Оператор усреднения.
43. Прекомпактность в  $L_p$ .
44. Компактные операторы в нормированных пространствах.
45. Примеры компактных операторов.
46. Обратный оператор; ряд Неймана.
47. Принцип открытости отображения. Второй принцип функционального анализа.
48. График оператора. Теорема о замкнутом графике. Замкнутый оператор.

49. Регулярные точки замкнутого оператора. Резольвента замкнутого оператора. Спектр замкнутого оператора.
50. Аксиома выбора. Частично упорядоченные множества. Теорема о неподвижной точке.
51. Теорема Хаусдорфа. Лемма Цорна.
52. Теорема Хана-Банаха вещественный случай ( $\dim E/E_0 = 1$ ).
53. Теорема Хана-Банаха вещественный случай (произвольные  $E, E_0$ ).
54. Теорема Хана-Банаха комплексный случай ( $\dim E/E_0 = 1$ ).
55. Теорема Хана-Банаха комплексный случай (произвольные  $E, E_0$ ).
56. Теорема Хана-Банаха в нормированном пространстве (как в вещественном, так и в комплексном случае). Следствия. Двойственное пространство.
57. Двойственные пространства:  $c'_0, c', l'_p, p \in [1, +\infty)$ .
58. Вариация функции, простейшие свойства вариации.
59. Интеграл Римана-Стилтьеса.
60. Теорема Рисса;  $C'$ .
61. Пространство двойственное к  $L_p(\mathcal{X}, d\rho), p \in [1, +\infty)$ .
62. Пространство двойственное к пространству  $S(\mathcal{X}, d\rho)$  в «специальном» случае.
63. Второе двойственное пространство. Каноническое вложение. Рефлексивные пространства.
64. Примеры рефлексивных и нерефлексивных пространств.
65. Слабая сходимость.
66. \*-слабая сходимость. Теорема Банаха-Алаоглу.
67. Пример «слабой неполноты». Нерефлексивность  $C[a, b]$ .