САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
кафедра высшей математики и математической физики

С.Б.Левин, Н.В.Смородина, В.А.Слоущ, М.М.Фаддеев

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ

первый семестр

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2013г.

- Рецензенты: проф., д.ф.-м.н. Т.А.Суслина;
  доц., к.ф.-м.н. Ф.В.Петров.
- Печатается по решению учебно-методической комиссии физического факультета СПбГУ.

С.Б.Левин, Н.В.Смородина, В.А.Слоущ, М.М.Фаддеев. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ. Первый семестр. — СПб.: СПбГУ, 2013. – 23с.

Введение

Настоящее пособие содержит упражнения и задачи по аналитической геометрии и линейной алгебре, предлагаемые студентам первого курса физического факультета СПбГУ на практических занятиях по курсу "Высшая алгебра" в первом семестре. Пособие может быть полезно преподавателям, ведущим практические занятия по курсу "Высшая алгебра" в первом семестре, и студентам, изучающим этот предмет (под контролем преподавателя).

Задания объединены по темам (всего пособие содержит 15 тем). Каждая тема (за исключением тем №8 и №15) содержит упражнения, задачи и задания для самостоятельного решения. В начале каждой темы помещается краткий список обсуждаемых вопросов. Темы №8 и №15 представляют собой примеры возможных контрольных работ, предлагаемых студентам в первом семестре по курсу "Высшая алгебра".

Деление на задачи и упражнения до некоторой степени условно. В основном упражнения являются простейшими заданиями; задачи — более сложными. Почти все темы содержат *дополнительные задачи*. Последние могут касаться вопросов, которые не обсуждались в основном курсе, и требуют от студентов самостоятельного изучения предмета.

Настоящее пособие не содержит краткого изложения основных понятий и формул, необходимых при решении задач (эти сведения содержатся, например, в [1] – [4]). Также пособие не содержит ответов и решений приведенных задач и упражнений. Решения некоторых из предлагаемых задач можно найти в [3] – [8].

Как правило изучение одной темы занимает одно занятие (два академических часа); темы №11 и №12 рассчитаны на полтора занятия каждая; тема №14 рассчитана на два занятия. Темы содержат больше заданий, чем можно пройти за отведенное время; предполагается, что преподаватель сам выберет подходящий материал. Программа курса "Высшая алгебра" предусматривает 15 практических занятий в первом семестре. Однако, в связи с отменой занятий в праздничные дни и во время коллоквиумов число практических занятий может сократиться до тринадцати, а потому не следует воспринимать пособие как жесткий план занятий. Представляется разумным, что на занятиях в "сильных" группах можно выпустить большую часть упражнений и сосредоточиться на задачах. Темы №1 и №2 в сильных группах можно пройти за одно занятие; контрольную работу по аналитической геометрии (тема №8) в сильных группах можно разделить на части и объединить с контрольными работами по математическому анализу. В группах с более слабой подготовкой рекомендуется сосредоточиться на упражнениях и опустить большинство задач. Также возможно в слабых группах опустить на практических занятиях темы №9 и №13.

Большинство упражнений и задач взяты авторами из [1] – [7] и часто используются в тексте без дополнительных ссылок. Авторы выражают признательность проф. Т.А.Суслиной и проф. А.С.Благовещенскому, которые предоставили большое количество задач.

Обозначения

- $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- $(\vec{a}, \vec{b})$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (в случае векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ имеется в виду стандартное скалярное произведение);
- $|\vec{a}|$ ($\|\vec{a}\|$) — модуль (норма) вектора $\vec{a}$;
- $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ — проекция вектора $\vec{b}$ на ненулевой вектор $\vec{a}$;
- $K_{\vec{a}}\vec{b}$ — компонента вектора $\vec{b}$ по ненулевому вектору $\vec{a}$ (по оси вдоль вектора $\vec{a}$);
- $\vec{a} \times \vec{b}$ — векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- A^t — транспонированная матрица A;
- A^* — матрица, сопряженная к матрице A;
- $\mathrm{Tr} A$ — след матрицы A.

Тема №1. Понятие вектора, линейные операции над векторами

Линейные операции над векторами; линейная зависимость векторов; базис, координаты векторов; декартова система координат.

Упражнения.

1. В параллелограмме $ABCD$ вектор $\overrightarrow{AB}$ обозначен через $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$ обозначен через $\vec{b}$; M — точка пересечения диагоналей $[AC]$ и $[BD]$. Выразить векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ обозначим $\overrightarrow{AA_1} =: \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} =: \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} =: \vec{c}$. Выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы: 1)$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$, 2)$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1}$, 3)$2\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1C} - \overrightarrow{BD}$, 4)$\overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{D_1C_1} - \overrightarrow{B_1C_1}$,

3. В пространстве заданы точки O, A и B. Точка C — середина отрезка $[AB]$.

1) Выразить вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$.
2) Выразить вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.
3) Выразить вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

4. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве; заданы векторы $\vec{p} = a+3\vec{b}+4\vec{c}$ и $\vec{q} = 2\vec{a} + 6\vec{b} + 8\vec{c}$. Проверить коллинеарны ли векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

5. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве. Найти числа x, y, z, удовлетворяющие условию $(x+y)\vec{a} + (x+z)\vec{b} + (y+z)\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости; заданы векторы $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$. При каком значении параметра λ векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны?

7. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве. Координаты вектора $\vec{p}$ в этом базисе: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. При каком значении параметра α векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{p}$ компланарны?

Задачи.

8. Какой особенностью должны обладать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имело место соотношение:

1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;
2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$;
3) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$?

9. Каким условием должны быть связаны векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, чтобы вектор $\vec{p} + \vec{q}$ делил угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ пополам (если все три вектора отложены из одной точки)?

10. В пространстве заданы точки O, A и B. Точка C принадлежит отрезку $[AB]$, и выполнено соотношение $\frac{|AC|}{|BC|} = \lambda$. Выразить вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

11. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Отложим вектор $\vec{b}$ из конца вектора $\vec{a}$ и вектор $\vec{c}$ из конца вектора $\vec{b}$. При каком условии полученная ломанная линия — треугольник?

12. Разложить вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{p} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

13. В пространстве задана декартова система координат и точки $A(A_x, A_y, A_z)$, $B(B_x, B_y, B_z)$. Точка C принадлежит отрезку $[AB]$, и выполнено соотношение $\frac{|AC|}{|BC|} = \lambda$. Найти координаты точки C.
14. Дан треугольник ABC, $A(A_x, A_y, A_z)$, $B(B_x, B_y, B_z)$, $C(C_x, C_y, C_z)$. Найти координаты точки пересечения медиан.
15. Зная векторы, служащие сторонами треугольника $\overrightarrow{AB} =: \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} =: \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} =: \vec{b}$, найти векторы, коллинеарные биссектрисам углов этого треугольника.
Дополнительные задачи.
16. Доказать, что в любом треугольнике ABC существует и единственна точка P, такая что $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$.
17. Решить предыдущую задачу в случае произвольного выпуклого n-угольника.
18. Где выбрать начало координат, чтобы сумма радиус-векторов всех вершин параллелограмма равнялась нулю? Сколько решений имеет данная задача?
19. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противолежащих ребер тетраэдра, проходят через одну и ту же точку и делятся в ней пополам.
20. Внутри тетраэдра $ABCD$ взята точка O. Докажите, что если $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$, то числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ одного знака.
21. Дан треугольник ABC, $A(A_x, A_y, A_z)$, $B(B_x, B_y, B_z)$, $C(C_x, C_y, C_z)$. Найти координаты точки пересечения биссектрис.
22. Даны три вершины куба: $K(1, -2, 0)$, $L(2, 0, 2)$ и $M(5, -3, -1)$. Найти остальные пять вершин.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.
1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости; заданы векторы $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $\vec{q} = 2y\vec{a} - x\vec{b}$. Известно, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ удовлетворяют условию $\vec{p} + \vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$. Найти числа x и y.
2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости; заданы векторы $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} + 6\vec{b}$. Коллинеарны ли векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$?
3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости; заданы векторы $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$. Коллинеарны ли векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$?
4. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве. Координаты вектора $\vec{p}$ в этом базисе: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; координаты вектора $\vec{q}$ в этом базисе: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Выразить через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы: $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{p} - \vec{q}$, $2\vec{p} + \vec{q}$. Каковы координаты вектора $\vec{p} - 3\vec{q}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$?
5. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве. Компланарны ли векторы $\vec{p} = \vec{a}$, $\vec{q} = \vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$, $\vec{r} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{a}$? Если да, укажите линейную зависимость, связывающую векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$.
6. 1) Из векторов, образованных ребрами параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, составить три базиса.
2) Разложить векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{B_1D}$, $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$ по базису $\{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.
7. В пространстве задана декартова система координат и точки $A(1, 3, 2)$, $B(5, 8, -1)$. Найти координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

8. В пространстве задана декартова система координат и точки $A(1,3,2)$, $B(5,8,-1)$. Точка C — середина отрезка $[AB]$. Найти координаты точки C.
9. В пространстве задана декартова система координат и точки $A(A_x, A_y, A_z)$, $B(B_x, B_y, B_z)$. Точка C — середина отрезка $[AB]$. Найти координаты точки C.
Задачи [3]**:** 73, 1012, 1022, 1023, 1027, 1099, 1099*, 1120.

Тема №2. Скалярное произведение векторов

Ортогональная компонента вектора по оси. Ортогональная проекция вектора на ось. Скалярное произведение. Прямоугольная декартова система коодинат.

Упражнения.

1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \pi/3$.
2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.
3. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ и компоненту вектора $\vec{a}$ по вектору $\vec{b}$, если $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$.
4. Найти проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ и компоненту вектора $\vec{b}$ по вектору $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \pi/3$.
5. В прямоугольной декартовой системе координат $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Найти $(\vec{a}, \vec{b})$.
6. Нормировать вектор $\vec{a} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$, если $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$ — орты декартовой прямоугольной системы координат.
7. Ортогональны ли векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$?
8. Для векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$ вычислить: a) $(\vec{a}, \vec{b})$; b) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$; c) $cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$; d) $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$; e) $K_{\vec{a}}\vec{b}$.
9. Проверить, что из равенства $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ следует равенство $\widehat{(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b})} = \widehat{(\vec{b}, \vec{a} + \vec{b})}$.
10. Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
11. В прямоугольной декартовой системе координат заданы точки $A(1,2,1)$, $B(3,-4,1)$. Найти $|AB|$.
12. В прямоугольной декартовой системе координат заданы точки $A(1,2,1)$, $B(3,-4,1)$, $C(4,3,1)$; найти $cos\widehat{BAC}$.
13. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют треугольник (т.о., $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$); $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 1/2$; найти $|\vec{c}|$.
Задачи.
14. Исследовать уравнение $(\vec{x}, \vec{a}) = A$ при заданных $A \in \mathbb{R}$, $\vec{a}$ (всегда ли есть решение, единственно ли оно, выписать общее решение).

15. Вычислить $|\vec{a}|^2 + 3(\vec{a}, \vec{b}) - 2(\vec{b}, \vec{c})$, если $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{m}^2 = 4$, $\vec{n}^2 = 1$, $\widehat{(\vec{m}, \vec{n})} = \pi/3$.

16. В треугольнике ABC известны $\overrightarrow{AB} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$, где $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ — ортонормированный базис. Вычислить длину медианы AM и высоты AD.

17. Чему равна сумма $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — три единичных вектора, удовлетворяющих условию $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 2$?

Дополнительные задачи.

18. В основании пирамиды лежит семиугольник. Можно ли на ее ребрах так расставить стрелки, что сумма полученных векторов будет равна нулю?

19. В треугольнике ABC, $A(A_x, A_y, A_z)$, $B(B_x, B_y, B_z)$, $C(C_x, C_y, C_z)$ найти точки пересечения высот и серединных перпендикуляров.

20. Векторы $\vec{i}, \vec{j}$ образуют ортогональный базис; $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$. Найти взаимный базис к базису $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Найти контрвариантные и ковариантные координаты вектора $\vec{x} = \vec{i} - \vec{j}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. *Указание*: взаимным базисом к базису $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ называется базис $\{\vec{a}', \vec{b}'\}$, удовлетворяющий условиям $(\vec{a}, \vec{a}') = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}') = 0$, $(\vec{b}, \vec{a}') = 0$, $(\vec{b}, \vec{b}') = 1$. Контрвариантными координатами вектора в базисе называются его обычные координаты, ковариантными координатами вектора в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ называются координаты вектора во взаимном базисе $\{\vec{a}', \vec{b}'\}$.

21. Выразить ковариантные координаты вектора через скалярные произведения вектора и базисных векторов.

22. При каких значениях a, b, c, d, m, n матрица $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & d & 1/\sqrt{2} \\ m & 1/\sqrt{2} & n \end{pmatrix}$ ортогональна? *Указание*: квадратная матрица ортогональна тогда и только тогда, когда ее строки ортогональны и нормированы.

23. Пусть $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — базис в пространстве; задан метрический тензор g базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Найти координаты векторов взаимного базиса в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. *Указание*: метрический тензор базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — это матрица $\begin{pmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{c}, \vec{a}) & (\vec{c}, \vec{b}) & (\vec{c}, \vec{c}) \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения [3]**:** 1034–1038, 1040, 1041.

Задачи [3]**:** 1043, 1044, 1046, 1047–1049, 1057.

Тема №3. Векторное и смешанное произведения векторов

Определители второго и третьего порядка; ориентация на плоскости и в пространстве; векторное произведение двух векторов; смешанное произведение трех векторов; геометрические и алгебраические свойства векторного и смешанного произведений; двойное векторное произведение.

Упражнения.

1. Найти определители:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Найти определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix},$$

раскладывая его а) по первой строке; б) по второй строке; в) по третьему столбцу.

3. Пусть $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — правая тройка. Какова ориентация троек $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$, $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$, $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$ и $\{\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\}$?

4. Найти векторные произведения $\vec{i} \times \vec{j}$, $\vec{i} \times \vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j}$, если $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — единичные, взаимоперпендикулярные орты правой декартовой системы координат.

5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ и вычислить площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы.

6. В прямоугольной декартовой системе координат заданы точки $A(3, 4, -1)$, $B(2, 0, 3)$, $C(-3, 5, 4)$. Найти площадь треугольника ABC.

7. Найти какой-нибудь вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (3, 0, -1)$ и $\vec{b} = (2, 4, 3)$.

8. Определить, лежат ли три точки на одной прямой: $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(3, 4, 5)$.

9. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

10. Определить объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если в прямоугольной декартовой системе координат заданы точки $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $A_1(0, 0, 1)$.

Задачи.

11. Выразить $|\vec{a} \times \vec{b}|$ через $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ и $(\vec{a}, \vec{b})$.

12. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$ и угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен $\pi/6$.

13. Дано $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$. Можно ли утверждать, что выполнено равенство $\vec{a} = \vec{b}$?

14. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — заданные ненулевые векторы, можно ли подобрать $\vec{x}$ так, чтобы $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$? Всегда ли задача имеет решение? Если решения существуют, то опишите множество всех решений.

Дополнительные задачи.

15. Пусть $\vec{a}$ — данный ненулевой вектор. Доказать, что для любого вектора $\vec{x}$ справедлива формула: $\vec{x} = \frac{(\vec{a},\vec{x})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} + \frac{\vec{a}\times(\vec{x}\times\vec{a})}{|\vec{a}|^2}$. При этом первое слагаемое — компонента вектора $\vec{x}$ по вектору $\vec{a}$, а второе слагаемое перпендикулярно $\vec{a}$.

16. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — три линейно независимых вектора. Доказать, что для любого вектора $\vec{x}$ справедливо тождество: $\vec{x} = \frac{(\vec{x}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}{(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}\vec{a} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{x}\cdot\vec{c})}{(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}\vec{b} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{x})}{(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}\vec{c}$.

17. Дан базис $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$. Выразить детерминант метрического тензора этого базиса через смешанное произведение $(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})$.

18. Дан базис $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$. Выразить через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы взаимного базиса.

19. Пусть даны координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Выразить смешанное произведение $(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})$ через заданные координаты и смешанное произведение $(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3)$.

20. Пусть даны координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Выразить координаты вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ во взаимном базисе через заданные координаты и смешанное произведение $(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3)$.

21. Пусть даны координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Выразить координаты вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ через заданные координаты и метрический тензор заданного базиса.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.

1. Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Найти площадь треугольника ABC, если известны векторы $\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{BC} = (0,0,1)$.

3. Определить, лежат ли четыре точки в одной плоскости: $A(1,0,1)$, $B(4,4,6)$, $C(2,2,3)$, $D(10,14,17)$.

4. Для векторов $\vec{a} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ вычислить произведения: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ и $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

Задачи [3]**:** 1076, 1078–1080, 1083, 1086, 1087, 1090, 1092, 1093.

Тема №4. Прямая линия на плоскости

Общее уравнение прямой на плоскости; уравнение прямой в отрезках на осях; нормальное уравнение прямой; расстояние от прямой до точки; каноническое уравнение прямой на плоскости; параметрические уравнения прямой на плоскости; взаиморасположение двух прямых на плоскости.

Упражнения.

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,1)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

2. Написать уравнение прямой (OY). *Указание*: прямая (OY) проходит через точку $M_0(0,0)$ и перпендикулярна вектору $\vec{i}$.

3. Для прямой $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$ найти координаты точек пересечения с осями.

4. Дано общее уравнение прямой $3x-4y+24 = 0$. Написать уравнение в отрезках и найти координаты точек пересечения с осями.

5. Прямая задана уравнением $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0$. Проверить, что уравнение — нормальное; найти расстояние от прямой до начала координат; найти расстояние от прямой до точки $M_1(1,1)$.

6. Дано общее уравнение прямой $3x - 4y + 24 = 0$. Написать: а) уравнение с угловым коэффициентом; б) уравнение в отрезках; в) нормальное уравнение. Найти: а) координаты точек пересечения прямой с осями; б) расстояние от начала координат до прямой.

7. Найти расстояние от точки $D(-1,1)$ до прямой $-4x + 3y - 9 = 0$.

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(0,0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{s} = (1,1)$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M(-1,-1)$, $N(1,2)$.

10. Определить взаиморасположение прямых, т.е. определить параллельны ли совпадают или пересекаются прямые. Для параллельных прямых определить расстояние между прямыми. Если прямые пересекаются найти точку пересечения и угол между прямыми: a) $x+y-1 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1}$; b) $x+y+5 = 0$, $x - y - 1 = 0$; c) $x + y - 1 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1}$.

Задачи.

11. Из точки $A(6,9)$ направлен луч под углом $\pi/4$ к прямой $y = 6$. Найти уравнение луча, отраженного от этой прямой.

12. В равнобедренном прямоугольном треугольнике даны координаты вершины острого угла $(5,7)$ и уравнение противолежащего катета $6x + 4y - 9 = 0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

13. Даны две прямые: $3x+4y-10 = 0$, $5x-12y+26 = 0$. Найти точку, которая находилась бы на расстоянии $\delta = 5$ от обеих прямых.

14. Написать уравнение прямой, проходящей через $M_0(-2,3)$ на одном расстоянии от точек $M_1(5,-1)$ и $M_2(3,7)$.

15. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(8,6)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площади 12.

16. Найти уравнения высот треугольника, зная уравнения его сторон:

$$2x - y + 3 = 0, \quad x + 5y - 7 = 0, \quad 3x - 2y + 6 = 0.$$

Дополнительные задачи.

17. Пусть M_0 — точка пересечения непараллельных прямых l_1 и l_2 на плоскости, заданных уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ соответственно. Доказать, что любая прямая, проходящая через точку M_0, может быть задана уравнением вида $\mu(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ при некоторых $\lambda^2+\mu^2\neq 0$. И наоборот, при всех $\lambda^2+\mu^2\neq 0$ выписанное уравнение задает прямую, проходящую через точку M_0.

18. Система координат на плоскости имеет два орта единичной длины с углом между ними $\pi/3$. В этой системе координат заданы две прямые $y=-x+5$ и $y=-0,5x-7$. Определить угол между прямыми.

19. Доказать, что три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и $A_3x+B_3y+C_3=0$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда определитель $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ равен нулю.

20. Дана одна вершина треугольника $A(-1,1)$, его высота $x+y=2$ и медиана $y=4x-4$. Найти остальные вершины.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,2)$ и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{N}=\vec{i}+2\vec{j}$.

2. Как выглядит уравнение произвольной прямой, перпендикулярной вектору $\overrightarrow{N}=\vec{i}+2\vec{j}$?

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{i}$.

4. Прямая задана уравнением $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+1=0$. Привести уравнение к нормальному виду; найти расстояние от прямой до начала координат; найти расстояние от прямой до точки $M_1(1,1)$.

5. Проверить, являются ли прямые $x+4y+2=0$ и $-4x+y+2=0$ а) параллельными, б) ортогональными. Почему?

6. Найти точку пересечения прямых $x-y+1=0$, $2x+3y-3=0$ и угол между ними.

Задачи [3]**:** 201*,216,245,261,263,302,311.

Тема №5. Плоскость в пространстве

Общее уравнение плоскости в пространстве; уравнение плоскости в отрезках на осях; нормальное уравнение плоскости; расстояние от точки до плоскости; уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки; параметрические уравнения плоскости; взаиморасположение двух плоскостей.

Упражнения.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,0,1)$ и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{N}=(1,0,1)$.

2. Дано общее уравнение плоскости $2x-y+2z+60=0$. Написать: а) уравнение в отрезках; б) нормальное уравнение. Найти: а) координаты точек пересечения плоскости с осями; б) расстояние от начала координат до плоскости.

3. Найти расстояние от точки $M(3,2,1)$ до плоскости $2x-2y+z-9=0$.
4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,1,1)$, $B(-1,1,1)$ и $C(1,1,-1)$.
5. Проверить, являются ли плоскости $3x+3y+3z-12=0$ и $x+y+z-169=0$ а) параллельными, б) ортогональными. Почему?
6. Найти угол между плоскостями $x-y+z-12=0$, $x+y+z+2=0$.
Задачи.
7. Через точку $M_0(1,1,2)$ провести плоскость, параллельную плоскости $x-3y+5z-12=0$.
8. Через точку $M_0(1,1,2)$ и ось (OZ) провести плоскость.
9. Провести плоскость через точки $A(4,0,-2)$ и $B(5,1,7)$ параллельно оси OX.
10. Провести плоскость, проходящую через начало координат и перпендикулярную плоскостям $2x-y+5z-1=0$, $x+3y-z-7=0$.
11. В пучке плоскостей, определяемом плоскостями $2x+y-3z+2=0$ и $5x+5y-4z+3=0$, найти две перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку $M_0(4,-3,1)$.
Дополнительные задачи.
12. Проверить, что плоскость, перпендикулярная диагонали куба и проходящая через ее середину, пересекает куб по правильному шестиугольнику.
13. Найти точку, симметричную точке $A(3,-7,5)$ относительно плоскости $2x-6y+3z-42=0$.
14. Найти уравнение пучка плоскостей, проходящих через линию пересечения двух данных (несовпадающих и непараллельных) плоскостей.
15. Найти центр сферы, вписанной в тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $2x+3y-6z-4=0$. Сделать рисунок.
16. Написать параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку $M_0(1,2,4)$ и содержащей векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.
1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,0,0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{i}$.
2. Написать уравнение плоскости (ZY). *Указание*: прямая (ZY) проходит через точку $M_0(0,0,0)$ и перпендикулярна вектору $\vec{i}$.
3. Плоскость задана уравнением $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0$. Проверить, что уравнение — нормальное; найти расстояние от плоскости до начала координат; найти расстояние от плоскости до точки $M(1,1,1)$.
4. Плоскость задана уравнением $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z+1=0$. Привести уравнение к нормальному виду; найти расстояние от плоскости до начала координат; найти расстояние от плоскости до точки $M(1,1,1)$.
Задачи [3]**:** 757, 772, 777, 794.

Тема №6. Прямая в пространстве

Общие уравнения прямой, канонические и параметрические уравнения прямой, уравнения прямой, проходящей через две заданные (несовпадающие) точки; взаиморасположение двух прямых в пространстве; взаиморасположение прямой и плоскости.

Упражнения.
1. Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1, 2, 1)$ и параллельной вектору $\overrightarrow{s} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
2. Прямая задана как пересечение двух плоскостей

$$\begin{cases} 2x + y + 2z - 6 = 0, \\ 3x + 2y - z - 8 = 0. \end{cases}$$

Написать канонические и параметрические уравнения прямой.
3. Каковы канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1, 1, 0)$, $B(0, -1, 2)$?
4. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1, 0, 1)$ и перпендикулярной плоскости $x - y + z - 8 = 0$.
5. Написать канонические уравнения прямой l_2, проходящей через точку $A(0, 1, 1)$ и параллельной прямой l_1, заданной каноническими уравнениями $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$.
6. Найти угол между прямыми

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{3}, \quad \frac{x+3}{-3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+4}{2}.$$

7. Найти точку пересечения прямой

$$\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 3 + 1t \end{cases}$$

и плоскости $-x + 3y + 2z = 1$. Определить угол между прямой и плоскостью.
Задачи.
8. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(1, -1, 1)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-7}{1}.$$

9. Найти уравнение плоскости, содержащей прямые

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}, \quad \frac{x+3}{-3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{-3}.$$

10. Найти уравнение плоскости, содержащей точку $A_0(2, 3, 4)$ и прямую l, заданную каноническими уравнениями $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-5}{1}$.
11. Найти уравнение плоскости, содержащей прямые

$$\frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}, \quad \frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}.$$

12. Исследовать взаиморасположение прямых, т.е. выяснить: а) лежат ли прямые в одной плоскости или скрещиваются; б) если лежат в одной плоскости, то пересекаются ли или совпадают, или параллельны; в) каков угол между прямыми); г) если не пересекаются, то каково расстояние между прямыми:

$$a)\ \ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3},\quad \frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1};$$

$$b)\ \ \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3},\quad \frac{x}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{6};$$

$$c)\ \ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1},\quad \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

13. Исследовать взаиморасположение прямых и плоскостей, т.е. определить: а) пересекаются ли прямая и плоскость или прямая лежит в плоскости, или прямая параллельна плоскости; б) угол между прямой и плоскостью; в) если прямая и плоскость не пересекаются, то каково расстояние между ними:

$$a)\ \ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3},\quad 4x+y-z-5=0;$$

$$b)\ \ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3},\quad -4x-y+z+11=0;$$

$$c)\ \ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3},\quad x+y+z-1=0.$$

14. Найти проекцию прямой

$$\begin{cases} 2x-y+2z-3=0,\\ 3x+2y-z-1=0\end{cases}$$

на плоскость $x+y+z-3=0$.

15. Найти расстояние между прямыми $l_1 : \frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$, $l_2 : \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$. Написать уравнения общего перпендикуляра. Написать уравнение плоскости проходящей через l_1 параллельно l_2.

Дополнительные задачи.

16. Пусть l_1 и l_2 — прямые в пространстве, проходящие через точки M_1, M_2 и с направляющими векторами $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ соответственно. Показать, что расстояние между прямыми может быть вычислено по формуле $d=\frac{|(\vec{s}_1\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{s}_1\times\vec{s_2}|}$.

17. В плоскости α: $x+y+z-3=0$ задана точка $O'(1,1,1)$; заданы векторы $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}-\vec{k}$ (параллельные плоскости α). На плоскости α задана прямая, чье уравнение в декартовой системе координат $\{O',\vec{a},\vec{b}\}$ есть $x+y-1=0$. Написать уравнение этой прямой, как прямой в пространстве в исходной прямоугольной декартовой системе координат.

18. Дан куб с ребром 1. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух его соседних граней.

19. Доказать, что прямая l образует равные углы с двумя пересекающимися прямыми, если и только если она перпендикулярна биссектрисе одного из образуемых ими углов.

20. Пусть прямые l_1, l_2 и l_3 — три попарно пересекающиеся прямые, лежащих в одной плоскости π. Прямая l образует равные углы с прямыми l_i, $i=1,2,3$. Показать, что прямая l ортогональна плоскости π.

21. Найти прямую, симметричную прямой $\begin{cases} x+y-2z=0\\ 3x-y+z=3\end{cases}$ относительно плоскости $2x+3y-5z=0$.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.
1. Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1,0,0)$ и параллельной вектору $\overrightarrow{s}=\vec{i}$.
2. Написать канонические и параметрические уравнения прямой (OZ). *Указание*: прямая (OZ) проходит через точку $M_0(0,0,0)$ параллельно вектору $\vec{k}$.
Задачи [3]**:** 819, 841, 839, 837, 851, 853.

Тема №7. Кривые второго порядка

Окружность. Определение и каноническое уравнение эллипса. Свойства эллипса. Эксцентриситет эллипса. Касательные к эллипсу. Оптическое свойство эллипса. Определение и каноническое уравнение гиперболы. Свойства гиперболы. Эксцентриситет гиперболы. Асимптоты гиперболы. Касательная к гиперболе. Оптическое свойство гиперболы. Определение и каноническое уравнение параболы. Свойства параболы. Касательные к параболе. Оптическое свойство параболы.

Упражнения.
1. Дано уравнение эллипса: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Вычислить длину осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.
2. Пусть оси эллипса лежат на осях координат. Составить уравнение эллипса, зная, что выполнено одно из следующих условий:

а) полуоси его соответственно равны 4 и 1;
б) расстояние между фокусами равно 1, и большая полуось равна 2;
в) большая полуось равна 10, и эксцентриситет равен $0,8$;
г) малая полуось равна 1, и эксцентриситет равен $1/2$;
д) эллипс проходит через точки $M(\sqrt{3},-2)$ и $N(-2\sqrt{3},1)$.

3. Написать уравнение прямой, касающейся эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ в точке $A(2,-3)$.
4. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$, проходящей через точку $A(-6,3)$.
5. Дано уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$. Вычислить длину осей, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы; написать уравнение асимптот гиперболы.
6. Составить уравнение гиперболы, оси которой совпадают с осями координат, если выполнено одно из следующих условий:

а) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10;
б) вещественная полуось равна 3, а точка $M(9,-4)$ лежит на гиперболе;
в) гипербола проходит через точку $P(-5,2)$ и имеет асимптоту $y=\sqrt{0,4}x$;
г) гипербола имеет общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$, и ее эксцентриситет равен $1,25$.

7. Провести касательные к гиперболе $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ через точки $M_0(2,0)$, $M_1(-4,3)$ и $M_2(5,-1)$.
8. Дано уравнение параболы: $y^2=2x$. Найти: координаты фокуса параболы, уравнение директрисы параболы, расстояние от фокуса до директрисы.

9. Составить уравнение параболы, если парабола симметрична относительно оси OX, проходит через начало координат и выполнено одно из условий:

а) расстояние от фокуса до вершины равно 3;
б) расстояние от фокуса до директрисы равно 3;
в) парабола проходит через точку $M(1, -4)$.

10. Через точку $B(5, -7)$ провести касательные к параболе $y^2 = 8x$.
11. Написать уравнение прямой, касающейся параболы $y^2 = 8x$ в точке $M(\frac{1}{8}, 1)$.

Задачи.

12. Дан эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; как обычно, для всякой точки M через $r_1(M)$ обозначим расстояния от точки M до левого фокуса эллипса. Для произвольных точки M и прямой l обозначим через $d(M, l)$ расстояние от точки M до прямой l. Найти прямую l_0, удовлетворяющую условию: для любых двух точек M_1, M_2 на эллипсе справедливо равенство $\frac{d(M_1,l_0)}{r_1(M_1)} = \frac{d(M_2,l_0)}{r_1(M_2)}$. Решите эту же задачу, заменив $r_1(M)$ на $r_2(M)$ — расстояние от точки M до правого фокуса.
13. Дана гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; как обычно, для всякой точки M через $r_2(M)$ обозначим расстояние от точки M до правого фокуса гиперболы. Для произвольных точки M и прямой l обозначим через $d(M, l)$ расстояние от точки M до прямой l. Найти прямую l_0, удовлетворяющую условию: для любых двух точек M_1, M_2 на правой ветви гиперболы справедливо равенство $\frac{d(M_1,l_0)}{r_2(M_1)} = \frac{d(M_2,l_0)}{r_2(M_2)}$. Решите аналогичную задачу для левой ветви гиперболы.
14. Найти геометрическое место середин хорд гиперболы, проходящих через ее вершину.
15. Прямой угол передвигается так, что его стороны касаются параболы. Найти траекторию вершины.

Дополнительные задачи.

16. Под каким углом пересекаются эллипс $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ и гипербола $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$.
17. Что является геометрическим местом центров окружностей, касающихся двух заданных окружностей: $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$ и $x^2 + y^2 + 2x - 8y = 0$. *Указание*: уравнение искомой кривой можно не писать.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.

1. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ при условии, что её эксцентриситет $\varepsilon = 2$.
2. Написать уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, проходящих через точку $M_0(5, -4)$.
3. Написать уравнение асимптот гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.
4. Написать уравнения касательных к параболе $y^2 = x$, касающихся её в точках с абсциссой $x_0 = 2$.
5. Дан эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Найти вертикальную прямую такую, что для всякой точки на эллипсе отношение расстояния от точки до прямой к одному из радиусов было константой.
6. Найти общие касательные к эллипсу $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ и параболе $y^2 = \frac{20}{3}x$.

Тема №8. Контрольная работа

Темы: векторная алгебра, прямая на плоскости, плоскость и прямая в пространстве; кривые второго порядка.

1. Даны координаты векторов (в прямоугольной декартовой системе координат):

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора $\vec{x}$, удовлетворяющего условиям $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$, $\text{Пр}_{\vec{c}}\vec{x} = \sqrt{2}$.

2. В равнобедренном прямоугольном треугольнике даны координаты вершины острого угла $(5, 7)$ и уравнение противолежащего катета $6x + 4y - 9 = 0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

3. Найти уравнение плоскости, содержащей прямые

$$\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}, \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

4. Исследовать взаиморасположение прямых:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

5. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ при условии, что её эксцентриситет $\varepsilon = 2$.

6. Написать уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, проходящих через точку $M_0(5, -4)$.

Тема №9. Преобразование координат на плоскости и в пространстве

Матрица перехода; ориентация; матрица поворота; преобразование уравнений при переходе к новой декартовой системе координат.

Упражнения.

1. Пусть $T = \begin{pmatrix}1 & 1/2\\2 & -1\end{pmatrix}$ есть матрица перехода от базиса $\{\vec{a}_1, \vec{b}_1\}$ к базису $\{\vec{a}_2, \vec{b}_2\}$; пусть $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ — координаты вектора $\vec{p}$ в базисе $\{\vec{a}_2, \vec{b}_2\}$. Выразить векторы $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$ через $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$. Найти координаты вектора $\vec{p}$ в базисе $\{\vec{a}_1, \vec{b}_1\}$.

2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ образуют базис на плоскости, $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$. Образуют ли векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ базис? Если да, то какова матрица перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ к базису $\{\vec{p}, \vec{q}\}$?

3. В пространстве задана декартова система координат $\{O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Заданы векторы $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ и точки $O'(1, 2, 2)$, $A(3, 2, 3)$. Составить матрицу перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ к базису $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ и найти координаты точки A в декартовой системе координат $\{O', \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$.

4. Найти матрицы перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ к базисам $\{\vec{b}, \vec{a}\}$, $\{-\vec{a}, \vec{b}\}$, $\{\vec{a}, -\vec{b}\}$ и определить, какие базисы имеют одинаковую ориентацию, а какие — разную.
5. Найти матрицы перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ к базисам $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$, $\{-\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$, $\{\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\}$ и определить, какие базисы имеют одинаковую ориентацию, а какие — разную.
6. Пусть $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ к базису $\{\vec{a}', \vec{b}'\}$; в декартовой системе координат $\{O, \vec{a}, \vec{b}\}$ задана точка $O'(3,2)$. Прямая l в декартовой системе координат $\{O, \vec{a}, \vec{b}\}$ задана уравнением $Ax + By + C = 0$. Каково уравнение прямой l в декартовой системе координат $\{O', \vec{a}', \vec{b}'\}$?
7. Пусть $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ к базису $\{\vec{a}', \vec{b}'\}$; в декартовой системе координат $\{O, \vec{a}, \vec{b}\}$ задана точка $O'(3,2)$. Некоторая линия в декартовой системе координат $\{O, \vec{a}, \vec{b}\}$ задана уравнением $x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y - 1 = 0$. Каково уравнение этой линии в декартовой системе координат $\{O', \vec{a}', \vec{b}'\}$?
Задачи.
8. Пусть $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ — матрица перехода от базиса $\{\vec{a}_1, \vec{b}_1\}$ к базису $\{\vec{a}_2, \vec{b}_2\}$. Пусть $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ — матрица перехода от базиса $\{\vec{a}_2, \vec{b}_2\}$ к базису $\{\vec{a}_3, \vec{b}_3\}$. Вычислить матрицу перехода от базиса $\{\vec{a}_1, \vec{b}_1\}$ к базису $\{\vec{a}_3, \vec{b}_3\}$.
9. Решите предыдущую задачу при условии, что T — матрица поворота на угол φ, а S — матрица поворота на угол ψ. Проверьте, что матрица перехода от базиса $\{\vec{a}_1, \vec{b}_1\}$ к базису $\{\vec{a}_3, \vec{b}_3\}$ является матрицей поворота на угол $\varphi + \psi$.
10. Привести уравнение $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$ к каноническому виду поворотом и сдвигом системы координат. Определить тип заданной кривой на плоскости.
11. Привести уравнение $xy + x - 2y + 1 = 0$ к каноническому виду поворотом и сдвигом системы координат. Определить тип заданной кривой на плоскости.
12. Привести уравнение $x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 5y - 1 = 0$ к каноническому виду поворотом и сдвигом системы координат. Определить тип заданной кривой на плоскости.
13. Найти фокусы и директрисы кривой $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 12x + 6y = 0$.
14. Проверить, что если T — ортогональная (2×2)-матрица и $\det T = 1$, то T — матрица поворота.
15. Прямоугольная декартова система координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ поворачивается вокруг вектора $\vec{k}$ на угол φ. Найти матрицу перехода к «новому» базису.
Дополнительные задачи.
16. Пусть $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ — базисы в пространстве; задан метрический тензор g базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ и матрица перехода T от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ к базису $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Каков метрический тензор базиса $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$? *Указание*: см. задачу 23 темы №2.
17. Пусть $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — базис в пространстве; задан метрический тензор g базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Найти матрицу перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ко взаимному базису. *Указание*: см. задача 20 темы №2.

18. Прямоугольная декартова система координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ поворачивается вокруг вектора $\vec{e} = e^1\vec{i} + e^2\vec{j} + e^3\vec{k}$ на угол φ. Найти матрицу перехода к «новому» базису.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.

1. Пусть $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ есть матрица перехода от базиса $\{\vec{a}_1, \vec{b}_1\}$ к базису $\{\vec{a}_2, \vec{b}_2\}$; пусть $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ — координаты вектора $\vec{p}$ в базисе $\{\vec{a}_2, \vec{b}_2\}$. Выразить векторы $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$ через $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$. Найти координаты вектора $\vec{p}$ в базисе $\{\vec{a}_1, \vec{b}_1\}$.

2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ образуют базис на плоскости, $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b}' = \vec{a} + \vec{b}$. Образуют ли векторы $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$ базис? Если да, то какова матрица перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ к базису $\{\vec{a}', \vec{b}'\}$?

3. В пространстве задана декартова система координат $\{O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Заданы векторы $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{r} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и точки $O'(1, -1, 2)$, $A(3, 2, 1)$. Составить матрицу перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ к базису $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ и найти координаты точки A в декартовой системе координат $\{O', \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$.

4. Пусть $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ — матрица перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ к базису $\{\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'\}$; в декартовой системе координат $\{O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ задана точка $O'(3, 2, -1)$. Плоскость α в декартовой системе координат $\{O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Каково уравнение плоскости α в декартовой системе координат $\{O', \vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'\}$?

5. Пусть $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ — матрица перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ к базису $\{\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'\}$; в декартовой системе координат $\{O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ задана точка $O'(3, 2, -1)$. Прямая l в декартовой системе координат $\{O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ задана уравнениями $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-4}{-1}$. Каково уравнение прямой l в декартовой системе координат $\{O', \vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'\}$?

Задачи [3]**:** 1106*, 618, 672, 673.

Тема №10. Алгебра матриц

Линейные операции над матрицами (сложение матриц, умножение матриц на числа, транспонирование и сопряжение матриц); умножение матриц (правило строка на столбец, некоммутативность, произведения квадратных, треугольных и диагональных матриц); квадратные матрицы (след, коммутатор, единичная матрица); действие матриц на векторы-столбцы, матричная запись систем линейных алгебраических уравнений.

Упражнения.

1. Вычислить:

$$4\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

2. Вычислить:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}^t,\quad \begin{pmatrix}1-i & 2\\ 1 & -1+2i\\ 3-i & 2+4i\end{pmatrix}^t,\quad \begin{pmatrix}1-i & 2\\ 1 & -1+2i\\ 3-i & 2+4i\end{pmatrix}^*,$$ где i — мнимая единица, т.е. $i^2=-1$.

3. Вычислить произведение матриц AB, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Определено ли произведение BA?

4. Вычислить произведения AB и BA (в случае квадратных матриц вычислить коммутатор $[A,B]$), если:

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}$; e) $A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \dots & b_n\end{pmatrix}$; f) $A=diag\{a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}\}$, $B=diag\{b_{11},b_{22},\dots,b_{nn}\}$.

5. Вычислить $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

6. Найти x_1, x_2, удовлетворяющие равенству

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}.$$

7. Какой системе линейных алгебраических уравнений удовлетворяют числа x_1, x_2, если

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}?$$

8. Какой системе линейных алгебраических уравнений удовлетворяют числа x_1, x_2,...,x_n, если

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}?$$

9. Вычислить $\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$.

Задачи.

10. Проверить равенства $AI_n = I_nA = A$, при всех $A \in M^{n,n}$.

11. Показать $I_n\vec{x} = \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$.

12. Вычислить $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

13. Проверить $TrAB = TrBA$.

14. Показать, что из равенства $AB - BA = \alpha I$ $(A, B \in M^{n,n})$ вытекает $\alpha = 0$.

15. Проверить равенства $TrA^tA = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [A]_{ij}^2$.

Дополнительные задачи.

16. Пусть выполнены следующие соотношения: $X, A, \Lambda \in M^{n,n}$, $\Lambda = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_k \neq \lambda_l$, $k \neq l$. Показать, что из равенства $[X, \Lambda] = A$ вытекают равенства $[A]_{ii} = 0$ (1), $[X]_{ij} = [A]_{ij}/(\lambda_i - \lambda_j)$, $i \neq j$ (2). Проверить, что при условии (1) равенства (2) достаточно для выполнения равенства $[X, \Lambda] = A$.

17. Доказать: для того чтобы матрица $A \in M^{n,n}$ коммутировала со всеми диагональными матрицами необходимо и достаточно, чтобы матрица A сама была диагональной.

18. Доказать: для того чтобы матрица $A \in M^{n,n}$ коммутировала со всеми матрицами из $M^{n,n}$ необходимо и достаточно, чтобы матрица A была кратной единичной $(A = \alpha I)$.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.

1. Вычислить:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^* ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 1-i & 3 \\ 2 & 1+2i \end{pmatrix}^* .$$

2. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 1-i & 3 \\ 2 & 1+2i \end{pmatrix}^*$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить произведения AB, BA и $[A,B]$, если:
a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Вычислить $\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 3+2i & 2+2i \end{pmatrix}^*\right]$.
Задачи.
5. Проверить равенства $TrA^*A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |[A]_{ij}|^2$.
[4]**:** 221 (c,d), 225, 226, 467, 468, 475, 476.

Тема №11. Определитель квадратной матрицы

Перестановки: беспорядки, четность и знак перестановки, транстпозиции; подстановки: эквивалентные записи и знак подстановки, произведение подстановок, обратная подстановка; определители: знак монома, вычисление определителя разложением по строке (столбцу), вычисление определителя треугольной матрицы, вычисление определителя методом Гаусса.

Упражнения.
1. Выписать транспозиции, посредством которых можно перейти от перестановки $\{1,2,3,4,5\}$ к перестановке $\{2,5,3,4,1\}$.
2. Определить число беспорядков в перестановках:
a) 1,3,4,7,8,2,6,9,5; b) 9,8,7,6,5,4,3,2,1.
3. Определить знак подстановки $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.
4. С каким знаком входят в определитель шестого порядка произведения:
a) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; b) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$?
5. Разложить по третьему столбцу и по второй строке определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

6. Разложить по первому столбцу и вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7. Вычислить методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{vmatrix}.$$

Задачи.

8. Определить четность перестановки $\{n, n-1, \ldots, 2, 1\}$.

9. Определить знак подстановки $\begin{pmatrix} 2n & 2n-1 & \ldots & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & 2n & \ldots & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти члены определителя, содержащие x^4 и x^3: $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$.

Дополнительные задачи.

11. Вычислить определители:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & . & . & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & . & . & b & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a & b & . & . & . \\ . & . & . & b & a & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & b & . & . & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & . & . & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & n \end{vmatrix}.$$

12. Доказать тождества

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j); \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{vmatrix} = n+1.$$

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.

1. Выписать определение детерминанта (4×4)-матрицы.

Задачи [4]**:** 275–281, 306-308.

Тема №12. Системы с квадратной неособой матрицей коэффициентов

Обратная матрица; системы с квадратной неособой матрицей коэффициентов; формулы Крамера; метод Гаусса.

Упражнения.

1. Построить присоединенную и обратную матрицы к матрицам:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

зная что матрица, обратная к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, есть $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Решите то же уравнение с правыми частями $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$.

3. Решить уравнение $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, считая f_1, f_2 известными. Если матрица $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ известна и равна $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то как с ее помощью записывается решение уравнения? Сравнивая ответы найдите a, b, c, d. Проверьте, что получившаяся матрица действительно обратна к $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Решить системы методом Крамера:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

5. Решить системы с квадратной неособой матрицей коэффициентов методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

6. Построить обратные матрицы методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

С помощью найденных обратных матриц решить предыдущую задачу.

7. Методом Гаусса найти матрицы X, Y, удовлетворяющие равенствам $XA = B$ и $AY = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.

1. Построить присоединенную и обратную матрицы к матрицам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Выписать расширенные матрицы систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

3. Восстановить системы линейных алгебраических уравнений по расширенным матрицам систем:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

4. Проверить, что матрицы A и B являются обратными друг к другу:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Может ли матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ иметь обратную? Если да, то можно ли с помощью обратной матрицы $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ найти решение уравнения $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$? Имеет ли на самом деле последнее уравнение решение?

6. Обратить матрицы методом Гаусса: [4]**:** 410(c,e), 400(a,c,e,g), 411(c),

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задачи: [4] 413, 417.

Тема №13. Спектр квадратной матрицы

Характеристический многочлен и спектр квадратной матрицы. Функции от матриц.

Упражнения.
1. Найти характеристический многочлен и спектр матриц:

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&1\\-3&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\-2&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Задачи.
2. Для матрицы $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ найти $d_A(\lambda)$ и $d_A(A)$.
3. Вычислить остаток от деления $\frac{\lambda^{10}}{(\lambda-2)(\lambda-3)}$, разложив $\frac{1}{(\lambda-2)(\lambda-3)}$ на простейшие дроби.
4. Вычислить A^{10} для матрицы $A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&4\end{pmatrix}$.
5. Разложить на простейшие функцию $R(x)=\frac{x^5+3x^3-1}{x^4-x^2}$ и вычислить $R(A)$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.
6. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$ найти $P(A)=A^{30}+3A^{13}-2A^6$.
Дополнительные задачи.
7. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ найти $e^A, \sin A$.
8. Вычислить x_n, $n\in\mathbb{N}$, если $x_1=x_2=1$, $x_{n+2}=x_n+x_{n+1}$. *Указание*: рассмотреть последовательность двумерных векторов $\vec{a}_n=\begin{pmatrix}x_n\\x_{n+1}\end{pmatrix}$; выразить $\vec{a}_{n+1}$ через $\vec{a}_n$, а затем и через n.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения [4]**:** 1032(a–g).
Указание: найти только спектр матриц, указанных в задачнике.
Задачи.
1. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$ найти $P(A)=A^{15}-2A^9+3A$.
2. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ найти $e^A, \sin A$.

Тема №14. Ранг матрицы. Решение систем линейных алгебраических уравнений общего вида

Ранг матрицы; критерий нетривиальной разрешимости однородной системы; теорема Кронекера-Капелли; условие разрешимости системы при любой правой части; решение общих систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса; структура общего решения однородной и неоднородной системы; условия разрешимости системы.

Упражнения.

1. Вычислить ранг матриц:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1&2\\1&2&1&0&2\\1&0&-1&2&2\\1&1&0&1&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&4&10&1\\4&8&18&7\\10&18&40&17\\1&7&17&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&1&1\end{pmatrix}.$$

2. Вычисляя ранг матриц коэффициентов, определить какие из однородных систем имеют нетривиальное решение:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&0\\1&1&-1&1&1&0\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&0&-1&0\\1&1&0&0\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\1&2&0\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\2&2&0\end{array}\right).$$

3. Сравнивая ранг матрицы коэффициентов и ранг расширенной матрицы, выяснить совместна ли система:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&3\\1&1&-1&1&1&2\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&2&1&1\\1&0&-1&1\\1&1&0&1\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\1&2&1\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\2&2&1\end{array}\right).$$

4. Какие из нижеперечисленных систем имеют решение при любой правой части:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&f_1\\1&1&-1&1&1&f_2\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&f_1\\1&2&1&f_2\\1&0&-1&f_3\\1&1&0&f_4\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c}1&1&f_1\\1&2&f_2\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c}1&1&f_1\\2&2&f_2\end{array}\right)?$$

5. Решить системы методом Гаусса и выписать соответствующую фундаментальную систему решений для однородной системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&2\\1&1&-1&1&1&3\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&2&1&0\\1&0&-1&0\\1&1&0&1\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\1&2&1\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\2&2&2\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&1&-1&1&1\\1&-1&1&1&1&1\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&0\\1&1&2&1&1&0\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&2&2&1\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&0\end{array}\right).$$

6. Выписать условия разрешимости для систем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & f_1 \\ 1 & 2 & 1 & f_2 \\ 1 & 0 & -1 & f_3 \\ 1 & 1 & 0 & f_4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & f_1 \\ 1 & 2 & f_2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & f_1 \\ 2 & 2 & f_2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & f_1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & f_2 \\ 4 & -3 & -5 & -7 & f_3 \\ 1 & 0 & 7 & 11 & f_4 \end{array}\right).$$

Задачи.
7. Вычислить ранг матрицы при всех значениях параметра λ:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}.$$

8. Показать, что ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.

9. При каких значениях параметра a однородная система $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{array}\right)$ имеет нетривиальное решения?

10. Исследовать систему $\left(\begin{array}{ccc|c} 1+\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \end{array}\right)$ при всех значениях параметра λ.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения [4]**:** 442 (b–e), 443(a–c), 444(a–e).

Тема №15. Контрольная работа

Темы: алгебра матриц; определитель матрицы; обратная матрица; ранг матрицы; условия разрешимости; метод Гаусса.

1. Вычислить $\operatorname{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$.

2. С каким знаком произведение $a_{33}a_{52}a_{76}a_{25}a_{41}a_{64}a_{17}$ входит в определитель седьмого порядка?

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$, $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$. Решить систему $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$.

5. Для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ найти присоединенную и обратную. Решить систему $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$.

6. Вычисляя ранг матрицы коэффициентов, определить при всех ли правых частях система имеет решение: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 1 & f_1 \\ 8 & 18 & 7 & f_2 \\ 18 & 40 & 17 & f_3 \\ 7 & 17 & 3 & f_4 \end{array}\right)$.

Эта задача может быть заменена на задачу о разрешимости конкретной неоднородной системы (теорема Кронекера–Капелли) или на задачу о существования нетривиального решения для однородной системы, или на задачу об определении условий разрешимости системы.

7. Решить систему методом Крамера: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$.

8. Решить систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Список литературы

[1] А.Г.Аленицын. Методическое указание к практическим занятиям по курсу "Высшая математика". Алгебра, I курс. Часть I. Л., 1984.

[2] А.Г.Аленицын. Учебные задания к практическим занятиям по курсу "Высшая математика"для групп ЦИПС. Алгебра I курс. Часть II. Л., 1988.

[3] Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитеческой геометрии. 31-е изд., стер. – СПб.: издательство "Лань", 2003. – 336с.

[4] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре 13е изд., 1999 – 286 с.

[5] М.А.Лялинов. Программа и задачи по курсу линейной алгебры и аналитической геометрии в основном потоке. СПб., 2007.

[6] Т.А.Суслина. Высшая алгебра. Задачи к коллоквиуму в первом семестре (усиленный поток). СПб., 2007.

[7] Т.А.Суслина. Высшая алгебра. Задачи к экзамену в первом семестре (усиленный поток). СПб., 2007.

[8] В.А.Слоущ. Высшая алгебра. Задачи с решениями для коллоквиумов и экзаменов. Базовый поток. I семестр. СПб., 2007.