Функциональный анализ и его приложения,
т. 9, вып. 4, 1975, 57—58.

О НАРУШЕНИИ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ

М. И. Белишев

1. Рассмотрим задачу об определении функции $c(z)$ из уравнения

$$u_{tt}(z, t) = c^2(z) u_{zz}(z, t), \qquad z \in (0, z_0), \quad 0 < z_0 \leqslant \infty, \tag{1.1}$$

по данным

$$u\,|_{t<x(z)} \equiv 0, \qquad u_z(0, t) = \delta(t), \qquad u(0, t) = F(t), \tag{1.2}$$

где $x(z) = \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{c(\zeta)}$ — время пробега возмущения от 0 до z. Неизвестная функция $c(z)$ разыскивается в классе $C^1(0, z_0)$ ($C^k(a, b)$ — класс k раз непрерывно дифференцируемых на интервале (a, b) функций), а $F(t)$ — вещественная ограниченная функция класса $C^2(0, 2x(z_0))$ и $F(+0) < 0$. Эту задачу мы назовем задачей I. Сделав замену переменной $x = x(z) = \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{c(\zeta)}$, получим эквивалентную задачу II о нахождении функции $c[x] = c(z(x))$ из уравнения

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - (\ln c[x])' u_x(x, t), \qquad x \in (0, x(z_0)), \tag{1.3}$$

по данным

$$u\,|_{t<x} \equiv 0, \qquad u_x(0, t) = c(0)\,\delta(t), \qquad u(0, t) = F(t) \tag{1.4}$$

(см. [2]). Рассмотрим связанное с задачей II семейство интегральных уравнений Крейна

$$D_F^x V^x(t) = -2F(+0) V^x(t) - \int\limits_{-x}^{x} \widetilde{F}'(t-s) V^x(s)\,ds = 1 \tag{K}$$

при $x \in (0, x(z_0))$, $|t| \leqslant x$. Здесь $\widetilde{F}(t) = F(t)$ при $t > 0$ и $\widetilde{F}(t) = -F(-t)$ при $t < 0$; $\widetilde{F}'(t)$ — производная $\widetilde{F}(t)$ при $t \neq 0$. Известно [1], что для разрешимости задачи II необходима и достаточна положительная определенность оператора D_F^x в $L_2(x)$ — пространстве квадратично суммируемых на $(-x, x)$ функций при всех $x \in (0, x(z_0))$ (условие Крейна (У. К.)). При этом $c[x] = \frac{1}{2} V^{+0}(+0)[V^x(x)]^{-2}$. Величина $M(z) = M[x(z)] = \int\limits_{-x}^{x} V^x(t)\,dt$ есть масса промежутка $(0, z)$ струны (если струна натянута единичной силой). Цель нашего исследования — ответить на вопрос: пусть при некотором $x = x_s$ условие (У. К.) впервые нарушается, какие особенности имеет струна при $x \to x_s$?

2. Исследуем уравнение Крейна в форме

$$D^x V^x(t) = V^x(t) + \int\limits_{-x}^{x} f(t-s) V^x(s)\,ds = \gamma, \qquad |t| \leqslant x, \quad x \in (0, x(z_0)); \tag{2.1}$$

здесь $f(t) = [2F(+0)]^{-1} \widetilde{F}'(t)$, $\gamma = -[2F(+0)]^{-1} > 0$, $D^x = \gamma D_F^x$. Функция $f(t)$ — четная, непрерывно дифференцируемая при $t > 0$ и $t < 0$. В точке $t = 0$ допускается излом $f(t)$. Пусть при данном x $B^x(\lambda_j) \subset L_2(x)$ — собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda_j^x \neq 1$, а $\overset{0}{W}{}_{jk}^x \in B^x(\lambda_j)$, т. е.

$$[D^x - \lambda_j^x E^x]\, \overset{0}{W}{}_{jk}^x = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m_j, \tag{2.2}$$

где $m_j = \dim B^x(\lambda_j)$. Примем следующую классификацию собственных значений: отнесем λ_j^x к первому типу и будем писать $\lambda_j^x \in \mathbf{\Lambda}_1$, если уравнение

$$[D^x - \lambda_j^x E^x] V_j^x(t) = 1 \tag{2.3}$$

неразрешимо в $L_2(x)$. В противном случае примем $\lambda_j^x \in \Lambda_2$.

Нами доказана

Теорема I. *Пусть $\lambda_j^x \neq 1$ есть собственное значение кратности m, т. е. $\dim B^x(\lambda_j) = m$; тогда в $B^x(\lambda_j)$ существует единственная (с точностью до числового множителя) функция $\overset{0}{W}{}^x(t) \in C^m[-x, x]$ такая, что*

а) *набор $\left\{\dfrac{\partial^i}{\partial t^i}\overset{0}{W}{}^x(t)\right\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, образует базис в $B^x(\lambda_j)$;*

б) *если при этом $\lambda_j^x \in \Lambda_1$, то эта функция $\overset{0}{W}{}^x(t)$ четная, $(\overset{0}{W}{}^x, 1) \neq 0$;*

в) *если же $\lambda_j^x \in \Lambda_2$, то $\overset{0}{W}{}^x(t)$ нечетная и $(\overset{0}{W}{}^x, G^x) \neq 0$, где*

$$G^x(t) = \frac{1}{2}\int_0^t [f(x-s) + f(x+s)]\, ds;$$

г) *в обоих случаях справедливо представление в окрестности конца промежутка $t = x$*

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i}\overset{0}{W}{}^x(t) = a\left(\frac{\partial^i}{\partial t^i}(x-t)^{m-1}\right)[1 + O(x-t)], \quad a \neq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.4}$$

3. Пусть x_s — наименьшее значение x, при котором $\lambda = 0$ становится собственным значением, и пусть $\dim B^{x_s}(0) = m$. Тогда [3] при $x \to x_s$ ровно m собственных значений (с учетом кратности) стремится к нулю. Нам удалось доказать, что справедлива

Теорема II. *Для собственных значений λ_j^x, стремящихся к нулю при $x \to x_s$, справедливо асимптотическое представление*

$$\lambda_j^x = C_j (x_s - x)^{2j+1}[1 + O(x_s - x)], \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \tag{3.1}$$

(нумерация в порядке убывания), где $C_j > 0$.

Отметим, что асимптотика (3.1) для λ_j^x с номерами $1 \leqslant j \leqslant m-1$ является более тонкой, чем можно было бы ожидать из общей теории возмущений [3], учитывая характер гладкости $f(t)$.

4. Используя теоремы I и II, можно уже исследовать решения уравнения Крейна (2.1). Приведем результаты.

а) Пусть $0 \in \Lambda_1$, $\dim B^{x_s}(0) = m$. Тогда при $x \to x_s$ имеем: $V^x(x) = A(x_s - x)^{-m}[1 + O(x_s - x)]$, $M[x] = B(x_s - x)^{-(2m+1)}[1 + O(x_s - x)]$, где $A, B > 0$. Соответственно $c[x] = O[(x_s - x)^{2m}]$. Если перейти от координаты x (времени пробега) к z, то $M(z) \to \infty$ при $z \to z_s = z(x_s) = \int_0^{x_s} c[x]dx < \infty$, т. е. масса интервала $(0, z)$ растет до бесконечности, $c(z) \to 0$ при $z \to z_s$.

б) Если $0 \in \Lambda_2$, то $V^x(x) = C(x_s - x)^m[1 + O(x_s - x)]$ $(C > 0)$, а $c[x] = O[(x_s - x)^{-2m}]$ и соответственно $z(x) \to \infty$ при $x \to x_s$.

При этом масса всей струны $(0, \infty)$ конечна при $z \to \infty$. Время прохождения всей струны $(0, \infty)$ равно x_s; следовательно, $c(z)$ растет с ростом z настолько быстро, что струна $(0, \infty)$ проходится за конечное время. Степенной характер зависимостей в а) и б) является следствием предположения о гладкости ядра $f(t)$ $(F(t) \in C^2(0, 2x_s))$.

В заключение автор приносит глубокую благодарность А. С. Благовещенскому за руководство работой.

Ленинградский государственный
университет

Поступило в редакцию
1 июля 1974 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г., ДАН СССР 94, № 6 (1954), 987—990. 2. Благовещенский А. С., Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова CXV (1971), 28—37. 3. Като Т., Теория возмущений линейных операторов, М., «Мир», 1972.