САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

Т. А. Суслина

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
II СЕМЕСТР
Выпуск 5

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2021 г.

- Рецензенты: проф., д.ф.-м.н. Ф. В. Петров;
  к.ф.-м.н. Н. Н. Сеник.
- Печатается по решению учебно-методической комиссии физического факультета СПбГУ.

Т. А. Суслина.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. II СЕМЕСТР. Выпуск 5. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 26 с.

Настоящее пособие содержит теоретический материал по курсу “Высшая алгебра”, который читается во втором семестре студентам первого курса физического факультета СПбГУ. Выпуск 5 является продолжением выпусков 1–4 учебно-методического пособия “Линейная алгебра. II семестр”, основанного на курсе лекций для студентов физического факультета СПбГУ. Выпуск 5 содержит главу 6 “Жорданова нормальная форма”. Пособие может быть полезно преподавателям, ведущим занятия по курсу “Высшая алгебра”, а также студентам, изучающим этот предмет.

Введение

Выпуск 5 является продолжением выпусков 1–4 учебно-методического пособия “Линейная алгебра. II семестр”, основанного на курсе лекций для студентов физического факультета СПбГУ; см. [3–6]. Выпуск 5 содержит главу 6 “Жорданова нормальная форма”.

Глава 6. Жорданова нормальная форма

§ 1. Понятие о жордановой форме

Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim E = n$. Пусть $A \in \Lambda(E)$. Наша цель — найти базис в E, в котором изображающая матрица a оператора A имела бы наиболее простой вид. Идеальный вариант — чтобы матрица a была диагональной. Но мы знаем, что не всякий оператор можно диагонализовать. (Для диагонализации необходимо и достаточно, чтобы для всех собственных значений совпадали алгебраические и геометрические кратности. Это равносильно существованию базиса из собственных векторов оператора A.) Пример оператора, не допускающего диагонализацию — оператор дифференцирования в пространстве многочленов Ω_{n-1} (где $n \geqslant 2$). Напомним, что он имеет одно собственное значение $\mu = 0$, его алгебраическая кратность равна n, а геометрическая кратность равна 1.

Оказывается, что для любого оператора $A \in \Lambda(E)$ существует базис, в котором изображающая матрица a имеет так называемую *жорданову форму*.

Определение 1.1. *Верхней клеткой Жордана порядка m, отвечающей собственному значению λ, называется матрица размера $(m \times m)$ вида*

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Матрица $J_m(\lambda)$ — верхнетреугольная, все диагональные элементы равны λ, параллельно диагонали идет линия из единиц, остальные элементы равны нулю. Характеристический многочлен этой матрицы равен $\det(J_m(\lambda) - tI) = (\lambda - t)^m$. Следовательно, матрица $J_m(\lambda)$ имеет единственное собственное значение λ максимальной алгебраической кратности $\sigma = n$. Будем искать собственные векторы $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ — нетривиальные решения системы

$$J_m(\lambda)\vec{x} = \lambda\vec{x} \;\Leftrightarrow\; (J_m(\lambda) - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}.$$

В подробной записи система имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^{m-1} \\ \xi^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\begin{cases} \xi^1 \text{ произвольно} \\ \xi^2 = 0 \\ \xi^3 = 0 \\ \vdots \\ \xi^m = 0 \end{cases}$$

Следовательно, общее решение системы есть

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \vec{e}_1, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Собственное подпространство $F = \mathrm{Ker}(J_m(\lambda) - \lambda I)$ одномерно, то есть геометрическая кратность равна единице: $\tau = 1$.

При $m = 1$ матрицу $J_1(\lambda) \in M^1$ можно отождествить с числом λ. При $m \geqslant 2$ матрицу $J_m(\lambda) \in M^m$ диагонализовать нельзя, поскольку у единственного собственного значения геометрическая кратность меньше алгебраической.

Определение 1.2. *Ящиком порядка σ, отвечающим собственному значению λ, будем называть блочно-диагональную матрицу класса M^σ вида*

$$L_\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{m_2}(\lambda) & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & J_{m_r}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = \sigma.$$

Диагональные блоки $J_{\;1}(\lambda), \dots, J_{m_r}(\lambda)$ — это клетки Жордана порядков $m_1, \dots, m_r$, отвечающие одному и тому же λ. Элементы матрицы $L_\sigma(\lambda)$ вне диагональных блоков равны нулю.

Отметим, что термин “ящик” не является общепринятым, но мы будем им пользоваться ввиду его удобства.

Упражнение. Проверьте, что единственным собственным значением матрицы $L_\sigma(\lambda)$ является число λ, причем его алгебраическая кратность максимальна (равна σ), а геометрическая кратность равна r, то есть, количеству клеток в ящике.

Пример. Рассмотрим ящик порядка 6, состоящий из трех клеток порядков 3, 2, 1:

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен равен

$$\det(L(\lambda) - tI) = (\lambda - t)^6.$$

Единственное собственное значение λ имеет алгебраическую кратность 6. Решая систему уравнений $(L(\lambda) - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, находим

$$\xi^2 = 0,\ \xi^3 = 0,\ \xi^5 = 0, \quad \xi^1, \xi^4, \xi^6 \in \mathbb{C} \text{ произвольны.}$$

Следовательно, геометрическая кратность $\tau = 3$, векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_6$ образуют базис в собственном подпространстве.

Определение 1.3. *Жордановой матрицей порядка n называется блочно-диагональная матрица класса M^n вида*

$$J = \begin{pmatrix} L_{\sigma_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{\sigma_2}(\lambda_2) & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & L_{\sigma_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_p = n.$$

Каждый диагональный блок $L_{\sigma_j}(\lambda_j)$ — это ящик, отвечающий собственному значению λ_j. Считаем числа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ различными. Элементы матрицы J вне диагональных блоков равны нулю.

Замечание. Поскольку каждый ящик $L_{\sigma_j}(\lambda_j)$ состоит из нескольких жордановых клеток, отвечающих одному и тому же значению λ_j, то в конечном счете J является блочно-диагональной матрицей, состоящей из жордановых клеток.

Часто жордановой матрицей, по определению, называют блочно-диагональную матрицу, состоящую из жордановых клеток. За счет перестановки клеток можно объединить клетки, отвечающие одному и тому же λ_j, в ящики. Это соответствует нашему определению.

Характеристический многочлен матрицы J равен

$$d_J(t) = (\lambda_1 - t)^{\sigma_1} \cdots (\lambda_p - t)^{\sigma_p}.$$

Сама матрица J имеет p различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Их алгебраические кратности равны $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$. Геометрическая кратность собственного значения λ_j равна количеству клеток в ящике $L_{\sigma_j}(\lambda_j)$.

Примеры.

- Рассмотрим жорданову матрицу порядка 5, состоящую из двух клеток порядков 2 и 3:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица J имеет два различных собственных значения: $\lambda_1 = 2$ алгебраической кратности 2 и геометрической кратности 1 и $\lambda_2 = 3$ алгебраической кратности 3 и геометрической кратности 1. Соответствующие собственные векторы — это $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$:

$$J\vec{e}_1 = 2\vec{e}_1, \quad J\vec{e}_3 = 3\vec{e}_3.$$

- Рассмотрим жорданову матрицу порядка 5, состоящую из трех клеток порядков 2, 1 и 2:
$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Матрица J имеет два различных собственных значения: $\lambda_1 = 2$ алгебраической кратности 3 и геометрической кратности 2 и $\lambda_2 = -1$ алгебраической кратности 2 и геометрической кратности 1. Соответствующие собственные векторы — это $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$:
$$J\vec{e}_1 = 2\vec{e}_1, \quad J\vec{e}_3 = 2\vec{e}_3, \quad J\vec{e}_4 = -\vec{e}_4.$$

Определение 1.4. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim E = n$. Пусть $A \in \Lambda(E)$. Жордановым базисом для оператора A называется такой базис $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ в E, в котором изображающая матрица $\widetilde{a} \in M^n$ оператора A имеет жорданову форму.*

Наша цель в этой главе — доказать следующий фундаментальный результат.

Теорема 1.5. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Для любого оператора $A \in \Lambda(E)$ существует жорданов базис. При этом жорданова матрица $\widetilde{a}$ (изображающая матрица оператора A в каком-либо жордановом базисе) определяется однозначно с точностью до перестановки клеток.*

Теорема будет доказана в следующих параграфах.

Из теоремы 1.5 выводится результат о приведении произвольной комплексной матрицы $a \in M^n$ к жордановой форме. Пусть задана матрица $a \in M^n$ с комплексными элементами. Рассмотрим пространство $E = \mathbb{C}^n$ и оператор

$A = \widehat{a} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — оператор умножения на матрицу a. В стандартном базисе $\mathbf{e} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ изображающей матрицей оператора A является сама матрица a. По теореме 1.5 существует жорданов базис $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$, в котором изображающая матрица $\widetilde{a}$ оператора A является жордановой матрицей. Вспомним закон преобразования $\widetilde{a} = b^{-1}ab$, где b — матрица перехода от стандартного базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$. Матрица b составлена из столбцов $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$. Мы получаем следующую теорему, которая формулируется на матричном языке.

Теорема 1.6. *Для любой матрицы $a \in M^n$ с комплексными элементами существуют жорданова матрица $\widetilde{a} \in M^n$ и неособая матрица $b \in M^n$, такие что $\widetilde{a} = b^{-1}ab$. При этом жорданова матрица $\widetilde{a}$ определяется однозначно с точностью до перестановки клеток.*

Зная собственные значения оператора A и их кратности (алгебраические и геометрические), не всегда можно однозначно восстановить жорданову матрицу $\widetilde{a}$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — все различные собственные значения оператора A, $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ — их алгебраические кратности, $\tau_1, \ldots, \tau_p$ — их геометрические кратности. Тогда жорданова матрица $\widetilde{a}$ состоит из p ящиков, j-ый ящик $L_{\sigma_j}(\lambda_j) \in M^{\sigma_j}$ состоит из τ_j клеток. Но для определения размеров клеток в данном ящике, вообще говоря, нужна дополнительная информация. Какая именно информация — станет ясно в процессе доказательства теоремы 1.5.

§ 2. Вспомогательные сведения

2.1. **Взаимно-простые многочлены.**

Определение 2.1. *Многочлены $P_1(t), P_2(t)$ называются взаимно-простыми, если они не имеют общего корня.*

Лемма 2.2. *Пусть $P_1(t), P_2(t)$ — взаимно-простые многочлены. Тогда существуют многочлены $Q_1(t), Q_2(t)$, такие* *что*

$$Q_1(t)P_1(t) + Q_2(t)P_2(t) \equiv 1. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $\deg P_1 = m$, $\deg P_2 = n$. (Здесь deg означает степень многочлена.)

Будем искать $Q_1(t)$ в виде многочлена степени не выше $n-1$ (у него n неизвестных коэффициентов) и $Q_2(t)$ в виде многочлена степени не выше $m-1$ (у него m неизвестных коэффициентов). Итого надо найти $m+n$ неизвестных. Левая часть (2.1) — многочлен степени $m+n-1$. Если в тождестве (2.1) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях t слева и справа, то получится неоднородная система из $m+n$ линейных уравнений для $m+n$ неизвестных.

Покажем, что эта система имеет единственное решение. В силу альтернативы Фредгольма, достаточно проверить, что соответствующая однородная система, эквивалентная тождеству

$$Q_1(t)P_1(t) + Q_2(t)P_2(t) \equiv 0, \tag{2.2}$$

имеет только тривиальное решение.

Пусть t_j — корень многочлена $P_1(t)$ кратности σ_j. Из (2.2) видно, что $Q_2(t)P_2(t) = -Q_1(t)P_1(t)$. Следовательно, число t_j является корнем многочлена $Q_2(t)P_2(t)$ кратности не меньше σ_j. Учитывая, что t_j не является корнем многочлена $P_2(t)$ (так как многочлены $P_1(t), P_2(t)$ взаимно-простые), делаем вывод: t_j является корнем многочлена $Q_2(t)$ кратности не меньше σ_j.

У многочлена $P_1(t)$ сумма кратностей корней равна m. Мы показали, что каждый корень $P_1(t)$ является корнем $Q_2(t)$ не меньшей кратности. Получается, что сумма кратностей корней многочлена $Q_2(t)$ не меньше m. Но $\deg Q_2 \leqslant m-1$. Если $Q_2(t) \not\equiv 0$, то сумма кратностей его корней не превосходит $m-1$. Следовательно, $Q_2(t) \equiv 0$. Тогда в силу (2.2) получаем $Q_1(t)P_1(t) \equiv 0$. Заведомо $P_1(t) \not\equiv 0$ (иначе многочлены $P_1(t)$ и $P_2(t)$ не были бы взаимно-простыми). Следовательно,

$Q_1(t) \equiv 0$. Это означает, что однородная система уравнений имеет только тривиальное решение. $\square$

Обобщением леммы 2.2 на случай нескольких полиномов является следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Пусть $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_s(t)$ — многочлены, причем ни одно число λ не является корнем одновременно всех этих многочленов. Тогда существуют многочлены $Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_s(t)$, такие что*

$$Q_1(t)P_1(t) + Q_2(t)P_2(t) + \cdots + Q_s(t)P_s(t) \equiv 1. \tag{2.3}$$

Доказательство. Докажем утверждение по индукции. *База* уже проверена (см. лемму 2.2).

Предположение индукции. Пусть для любых многочленов $\widetilde{P}_1(t), \ldots, \widetilde{P}_{s-1}(t)$, не имеющих общего корня, существуют многочлены $\widetilde{Q}_1(t), \ldots, \widetilde{Q}_{s-1}(t)$, такие что

$$\widetilde{Q}_1(t)\widetilde{P}_1(t) + \cdots + \widetilde{Q}_{s-1}(t)\widetilde{P}_{s-1}(t) \equiv 1. \tag{2.4}$$

Индукционный переход. Предположим, что многочлены $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_s(t)$ не имеют общего корня.

Рассмотрим многочлены $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_{s-1}(t)$. Пусть $X(t)$ — их наибольший общий делитель. (Можно выбрать $X(t)$ вида

$$X(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdots (t - \lambda_q)^{k_q},$$

где числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ — всевозможные общие корни этих многочленов, а $k_1, \ldots, k_q$ — минимальные кратности. Тогда $(t - \lambda_j)^{k_j}$ является общим делителем этих многочленов, а $(t - \lambda_j)^{k_j+1}$ уже не является.)

Тогда

$$P_j(t) = X(t)\widetilde{P}_j(t), \quad j = 1, \ldots, s-1,$$

причем многочлены $\widetilde{P}_1(t), \ldots, \widetilde{P}_{s-1}(t)$ уже не имеют ни одного общего корня. По предположению индукции существуют многочлены $\widetilde{Q}_1(t), \dots, \widetilde{Q}_{s-1}(t)$, такие что выполнено (2.4). Домножая (2.4) на $X(t)$, получаем

$$\widetilde{Q}_1(t)P_1(t) + \dots + \widetilde{Q}_{s-1}(t)P_{s-1}(t) \equiv X(t). \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь два многочлена — $X(t)$ и $P_s(t)$. Они взаимно-простые (иначе исходный набор многочленов имел бы общий корень). Применим лемму 2.2. Существуют многочлены $Q(t)$ и $Q_s(t)$ такие, что

$$Q(t)X(t) + Q_s(t)P_s(t) \equiv 1. \tag{2.6}$$

Обозначим $Q_j(t) := Q(t)\widetilde{Q}_j(t)$, $j = 1, \dots, s-1$. Теперь из (2.5) и (2.6) вытекает, что

$$Q_1(t)P_1(t) + \dots + Q_s(t)P_s(t) \equiv 1.$$

Это завершает индукционный переход. $\square$

2.2. **Лемма о нильпотентном операторе.**

Лемма 2.4. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пусть $A \in \Lambda(E)$, причем $(A - \lambda I)^m = \mathbf{0}_{E\to E}$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда единственным собственным значением оператора A является число λ.*

Доказательство. Поскольку $(A - \lambda I)^m = \mathbf{0}_{E\to E}$, то

$$\det((A-\lambda I)^m) = 0 \Leftrightarrow (\det(A - \lambda I))^m = 0 \Leftrightarrow \det(A-\lambda I) = 0.$$

Следовательно, λ является собственным значением оператора A.

Пусть μ — собственное значение оператора A. Существует собственный вектор $f \neq \mathbf{0}$ такой, что $Af = \mu f$. Тогда $(A - \lambda I)^m f = (\mu - \lambda)^m f$. Левая часть этого равенства равна $\mathbf{0}$, поскольку $(A - \lambda I)^m = \mathbf{0}_{E\to E}$. Следовательно, $(\mu - \lambda)^m f = \mathbf{0}$, откуда $\mu = \lambda$. Это доказывает единственность. $\square$

§ 3. Корневые подпространства

Определение 3.1. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пусть λ — собственное значение оператора $A \in \Lambda(E)$. Множество*

$$E(\lambda) = \{x \in E : (A - \lambda I)^n x = \mathbf{0}\} = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^n$$

называется корневым подпространством оператора A, отвечающим собственному значению λ.

Очевидно, если $(A - \lambda I)^k x = \mathbf{0}$ при некотором $k \leqslant n$, то $x \in E(\lambda)$. В частности, собственные векторы $f \neq \mathbf{0}$ (такие, что $Af = \lambda f$) принадлежат $E(\lambda)$. Поэтому корневое подпространство $E(\lambda)$ содержит собственное подпространство, и, следовательно, $E(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$.

Предложение 3.2. *Корневое подпространство $E(\lambda)$ является инвариантным подпространством оператора A.*

Доказательство. Пусть $x \in E(\lambda)$. Требуется доказать, что тогда $Ax \in E(\lambda)$.

Имеем: $(A - \lambda I)^n x = \mathbf{0}$. Тогда $A(A - \lambda I)^n x = \mathbf{0}$. Поскольку A коммутирует с любым многочленом от A, то

$$A(A - \lambda I)^n = (A - \lambda I)^n A.$$

Следовательно, $(A - \lambda I)^n Ax = \mathbf{0}$, то есть $Ax \in E(\lambda)$. $\square$

Фундаментальным результатом является теорема разложения по корневым подпространствам.

Теорема 3.3. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пусть $A \in \Lambda(E)$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — все различные собственные значения оператора A, а $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ — их алгебраические кратности. Пусть $E(\lambda_j)$ — корневое подпространство оператора A, отвечающее собственному значению λ_j. Тогда пространство E есть прямая сумма корневых подпространств:*

$$E = E(\lambda_1) \dotplus E(\lambda_2) \dotplus \cdots \dotplus E(\lambda_p).$$

При этом $\dim E(\lambda_j) = \sigma_j$. *Каждое подпространство* $E(\lambda_j)$ *инвариантно относительно* A. *Оператор* $A_j := A|_{E(\lambda_j)}$, *действующий в* $E(\lambda_j)$, *имеет единственное собственное значение* λ_j *алгебраической кратности* σ_j. *Оператор* $B_j := A_j - \lambda_j I$ *является нильпотентным оператором, то есть* $B_j^{\sigma_j} = \mathbf{0}_{E(\lambda_j)\to E(\lambda_j)}$.

Доказательство. 1) Запишем характеристический многочлен оператора A:

$$d_A(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{\sigma_1}(t-\lambda_2)^{\sigma_2}\cdots(t-\lambda_p)^{\sigma_p}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим многочлены

$$P_j(t) = \prod_{s\neq j}(t-\lambda_s)^{\sigma_s}, \quad j = 1,\ldots,p.$$

Тогда многочлены $P_1(t),\ldots,P_p(t)$ не имеют общего корня. В силу леммы 2.3 существуют многочлены $Q_1(t),\ldots,Q_p(t)$, такие что

$$P_1(t)Q_1(t) + P_2(t)Q_2(t) + \cdots + P_p(t)Q_p(t) \equiv 1. \tag{3.2}$$

2) Рассмотрим подпространства

$$F_j := \operatorname{Ran} P_j(A)Q_j(A), \quad j = 1,\ldots,p. \tag{3.3}$$

Проверим, что

$$F_j \subset E(\lambda_j), \quad j = 1,\ldots,p. \tag{3.4}$$

Имеем:

$$d_A(t) = (-1)^n (t-\lambda_j)^{\sigma_j} P_j(t).$$

Следовательно,

$$d_A(A) = (-1)^n (A-\lambda_j I)^{\sigma_j} P_j(A).$$

В силу тождества Кэли $d_A(A) = \mathbf{0}_{E\to E}$. Получаем

$$(A-\lambda_j I)^{\sigma_j} P_j(A) = \mathbf{0}_{E\to E}. \tag{3.5}$$

Пусть $x \in F_j$. Тогда найдется элемент $y \in E$ такой, что $x = P_j(A)Q_j(A)y$. С учетом (3.5)

$$(A-\lambda_j I)^{\sigma_j} x = (A-\lambda_j I)^{\sigma_j} P_j(A)Q_j(A)y = \mathbf{0}. \qquad (3.6)$$

Таким образом, $x \in E(\lambda_j)$. Вложение (3.4) доказано.

3) Из (3.2) следует, что

$$P_1(A)Q_1(A) + P_2(A)Q_2(A) + \cdots + P_p(A)Q_p(A) = I.$$

Поэтому любой вектор $x \in E$ можно представить в виде

$$x = P_1(A)Q_1(A)x + P_2(A)Q_2(A)x + \cdots + P_p(A)Q_p(A)x.$$

Последовательные слагаемые справа принадлежат подпространствам $F_1, \dots, F_p$ соответственно. Следовательно,

$$E = F_1 + F_2 + \cdots + F_p. \qquad (3.7)$$

В силу вложений (3.4) отсюда следует, что

$$E = E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + \cdots + E(\lambda_p). \qquad (3.8)$$

4) Проверим теперь, что линейная сумма (3.8) является прямой суммой. Для этого нужно убедиться, что

$$E(\lambda_j) \cap \mathcal{E}_j = \{\mathbf{0}\}, \text{ где } \mathcal{E}_j := \sum_{s \neq j} E(\lambda_s), \quad j = 1, \dots, p. \qquad (3.9)$$

Пусть $x \in E(\lambda_j) \cap \mathcal{E}_j$. Поскольку $x \in E(\lambda_j)$, то

$$(A-\lambda_j I)^n x = \mathbf{0}. \qquad (3.10)$$

С другой стороны, $x \in \mathcal{E}_j$. Это означает, что

$$x = \sum_{s \neq j} g_s, \text{ где } g_s \in E(\lambda_s).$$

Имеем: $(A-\lambda_s I)^n g_s = \mathbf{0}$, $s \neq j$. Следовательно,

$$\prod_{s \neq j} (A-\lambda_s I)^n x = \mathbf{0}. \qquad (3.11)$$

Рассмотрим многочлены $(t-\lambda_j)^n$ и $\prod_{s\neq j}(t-\lambda_s)^n$. Они взаимно-простые. По лемме 2.2 существуют многочлены $R_1(t)$ и $R_2(t)$, такие что

$$R_1(t)(t-\lambda_j)^n + R_2(t)\prod_{s\neq j}(t-\lambda_s)^n \equiv 1.$$

Тогда

$$R_1(A)(A-\lambda_j I)^n + R_2(A)\prod_{s\neq j}(A-\lambda_s I)^n = I,$$

а потому

$$R_1(A)(A-\lambda_j I)^n x + R_2(A)\prod_{s\neq j}(A-\lambda_s I)^n x = x.$$

В силу (3.10) первое слагаемое равно нулю, а в силу (3.11) второе слагаемое равно нулю. Таким образом, $x=\mathbf{0}$. Мы проверили соотношение (3.9). Отсюда следует, что сумма (3.8) является прямой суммой:

$$E = E(\lambda_1) \dot{+} E(\lambda_2) \dot{+} \cdots \dot{+} E(\lambda_p). \tag{3.12}$$

5) Из (3.7) и вложений (3.4) следует, что сумма (3.7) также прямая:

$$E = F_1 \dot{+} F_2 \dot{+} \cdots \dot{+} F_p. \tag{3.13}$$

В силу (3.12) имеем

$$\dim E(\lambda_1) + \cdots + \dim E(\lambda_p) = n.$$

Из (3.13) следует, что

$$\dim F_1 + \cdots + \dim F_p = n.$$

Следовательно,

$$\dim F_1 + \cdots + \dim F_p = \dim E(\lambda_1) + \cdots + \dim E(\lambda_p). \tag{3.14}$$

Поскольку $F_j \subset E(\lambda_j)$, то $\dim F_j \leqslant \dim E(\lambda_j)$, и равенство (3.14) может выполняться только в случае

$$\dim F_j = \dim E(\lambda_j), \quad j=1,\ldots,p.$$

Отсюда следует, что

$$F_j = E(\lambda_j), \quad j = 1, \dots, p.$$

6) В силу предложения 3.2 подпространства $E(\lambda_j)$ инвариантны относительно оператора A. Рассмотрим оператор $A_j = A|_{E(\lambda_j)}$. В силу (3.6) для любого вектора $x \in F_j = E(\lambda_j)$ выполнено $(A - \lambda_j I)^{\sigma_j} x = \mathbf{0}$. Это означает, что

$$(A_j - \lambda_j I)^{\sigma_j} = \mathbf{0}_{E(\lambda_j) \to E(\lambda_j)}.$$

По лемме 2.4 число λ_j — единственное собственное значение оператора A_j.

7) Осталось найти размерности подпространств $E(\lambda_j)$. Обозначим $n_j = \dim E(\lambda_j)$. Выберем базисы в каждом подпространстве $E(\lambda_j)$. Объединение этих базисов образует базис в E. Пусть $a_j \in M^{n_j}$ — изображающая матрица оператора A_j в соответствующем базисе в $E(\lambda_j)$. Тогда изображающая матрица $a \in M^n$ оператора A в объединенном базисе имеет блочную структуру:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & a_p \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$d_A(t) = d_a(t) = d_{a_1}(t) \cdots d_{a_p}(t).$$

Поскольку λ_j — единственное собственное значение оператора A_j, то $d_{a_j}(t) = d_{A_j}(t) = (-1)^{n_j}(t - \lambda_j)^{n_j}$. Таким образом,

$$d_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_p)^{n_p}.$$

Сравним это с (3.1). Поскольку разложение многочлена на множители единственно, делаем вывод, что $n_j = \sigma_j$, $j = 1, \dots, p$. Итак, доказано, что

$$\dim E(\lambda_j) = \sigma_j, \quad j = 1, \dots, p. \qquad \square$$

§ 4. Жорданова форма для нильпотентного оператора

Теорема разложения по корневым подпространствам сводит задачу о построении жорданова базиса для произвольного оператора A к анализу операторов A_j, действующих в корневых подпространствах $E(\lambda_j)$. При этом операторы $B_j = A_j - \lambda_j I$ являются нильпотентными.

Нам остается показать, что для любого нильпотентного оператора существует жорданов базис.

Теорема 4.1. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $n = \dim E \geqslant 1$. Пусть $B \in \Lambda(E)$ — нильпотентный оператор. Тогда в E существует жорданов базис для оператора B. Изображающая матрица$b \in M^n$ оператора B в этом базисе имеет жорданову форму и определяется однозначно с точностью до перестановки клеток.*

В случае $B = \mathbf{0}_{E\to E}$ утверждение очевидно. Будем считать, что $B \neq \mathbf{0}_{E\to E}$. Тогда нильпотентность оператора означает, что для некоторого $2 \leqslant m \leqslant n$ выполнено

$$B^m = \mathbf{0}_{E\to E}, \quad \text{но при этом } B^{m-1} \neq \mathbf{0}_{E\to E}. \tag{4.1}$$

Лемма 4.2. *Пусть выполнено* (4.1)*. Тогда справедливы вложения*

$$\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} B^2 \subset \dots \subset \operatorname{Ker} B^{m-1} \subset \operatorname{Ker} B^m = E,$$

причем эти вложения строгие, то есть

$$\dim \operatorname{Ker} B < \dim \operatorname{Ker} B^2 < \dots < \dim \operatorname{Ker} B^{m-1} < \dim \operatorname{Ker} B^m.$$

Доказательство. Если $x \in \operatorname{Ker} B^k$, то $B^k x = \mathbf{0}$. Тогда $B^{k+1}x = B(B^k x) = \mathbf{0}$. Поэтому $\operatorname{Ker} B^k \subset \operatorname{Ker} B^{k+1}$.

Проверим, что вложения строгие. Предположим, что при некотором k выполнено $\operatorname{Ker} B^k = \operatorname{Ker} B^{k+1}$. Тогда

$$\operatorname{Ker} B^k = \operatorname{Ker} B^{k+1} = \operatorname{Ker} B^{k+2} = \dots$$

(ядра всех степеней B^{k+j}, $j = 0, 1, 2, \dots$, совпадают). Действительно, пусть $x \in \operatorname{Ker} B^{k+2}$. Тогда $B^{k+2}x = \mathbf{0}$, то есть $B^{k+1}(Bx) = \mathbf{0}$. Следовательно, $Bx \in \operatorname{Ker} B^{k+1} = \operatorname{Ker} B^k$. Тогда $B^{k+1}x = B^k(Bx) = \mathbf{0}$, то есть $x \in \operatorname{Ker} B^{k+1}$. Мы показали, что $\operatorname{Ker} B^{k+2} \subset \operatorname{Ker} B^{k+1}$. Обратное включение верно всегда. Следовательно, $\operatorname{Ker} B^{k+2} = \operatorname{Ker} B^{k+1}$.

Поскольку выполнено (4.1), то заведомо

$$\operatorname{Ker} B^{m-1} \neq \operatorname{Ker} B^m = E$$

и совпадение ядер начнется с $k = m$. □

Лемма 4.3. *Пусть G_m — какое-либо прямое дополнение подпространства $\operatorname{Ker} B^{m-1}$ до $\operatorname{Ker} B^m = E$, то есть*

$$E = \operatorname{Ker} B^{m-1} \dotplus G_m. \tag{4.2}$$

Тогда подпространство $BG_m = \{y = Bx : \ x \in G_m\}$ лежит в некотором прямом дополнении G_{m-1} подпространства $\operatorname{Ker} B^{m-2}$ до $\operatorname{Ker} B^{m-1}$, то есть

$$\operatorname{Ker} B^{m-1} = \operatorname{Ker} B^{m-2} \dotplus G_{m-1}, \quad BG_m \subset G_{m-1}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Достаточно проверить, что

1) $BG_m \subset \operatorname{Ker} B^{m-1}$,

2) $BG_m \cap \operatorname{Ker} B^{m-2} = \{\mathbf{0}\}$.

Отсюда будет следовать, что сумма $\operatorname{Ker} B^{m-2} \dotplus BG_m$ — прямая и является подпространством в $\operatorname{Ker} B^{m-1}$. Пусть $\widetilde{G}_{m-1}$ — какое-либо прямое дополнение подпространства $\operatorname{Ker} B^{m-2} \dotplus BG_m$ до $\operatorname{Ker} B^{m-1}$:

$$\operatorname{Ker} B^{m-1} = \operatorname{Ker} B^{m-2} \dotplus BG_m \dotplus \widetilde{G}_{m-1}.$$

Тогда будет выполнено (4.3) при $G_{m-1} = BG_m \dotplus \widetilde{G}_{m-1}$.

Итак, проверим 1). Поскольку $B^m = \mathbf{0}_{E \to E}$, то $B^{m-1}(Bx) = B^m x = \mathbf{0}$ для любого x. Поэтому $Bx \in \operatorname{Ker} B^{m-1}$ при любом $x \in E$. В частности, отсюда следует вложение 1).

Проверим свойство 2). Пусть $y \in BG_m \cap \operatorname{Ker} B^{m-2}$. Тогда найдется $x \in G_m$ такой, что $y = Bx$. При этом $y = Bx \in$

$\operatorname{Ker} B^{m-2}$. Следовательно, $B^{m-1}x = \mathbf{0}$, то есть $x \in \operatorname{Ker} B^{m-1}$. В силу (4.2) выполнено $G_m \cap \operatorname{Ker} B^{m-1} = \{\mathbf{0}\}$. Таким образом, $x = \mathbf{0}$. $\square$

Обобщением леммы 4.3 является следующее утверждение.

Лемма 4.4. *Найдутся подпространства G_k, $k = 1, \ldots, m$, такие что*

$$\operatorname{Ker} B^k = \operatorname{Ker} B^{k-1} \dot{+} G_k, \quad k = 2, \ldots, m; \quad \operatorname{Ker} B = G_1, \tag{4.4}$$

причем

$$BG_k \subset G_{k-1}, \quad k = 2, \ldots, m. \tag{4.5}$$

Доказательство. При доказательстве леммы 4.3 мы уже сделали первый шаг: проверили (4.4) при $k = m, m-1$ и (4.5) при $k = m$. Всего нужно сделать $m-1$ шагов.

Предположим, что

$$\operatorname{Ker} B^k = \operatorname{Ker} B^{k-1} \dot{+} G_k, \quad \operatorname{Ker} B^{k-1} = \operatorname{Ker} B^{k-2} \dot{+} G_{k-1},$$

причем $BG_k \subset G_{k-1}$. Проверим, что тогда выполнено
1) $BG_{k-1} \subset \operatorname{Ker} B^{k-2}$,
2) $BG_{k-1} \cap \operatorname{Ker} B^{k-3} = \{\mathbf{0}\}$.

Отсюда будет следовать, что сумма $\operatorname{Ker} B^{k-3} \dot{+} BG_{k-1}$ — прямая и является подпространством в $\operatorname{Ker} B^{k-2}$. Пусть $\widetilde{G}_{k-2}$ — какое-либо прямое дополнение подпространства $\operatorname{Ker} B^{k-3} \dot{+} BG_{k-1}$ до $\operatorname{Ker} B^{k-2}$:

$$\operatorname{Ker} B^{k-2} = \operatorname{Ker} B^{k-3} \dot{+} BG_{k-1} \dot{+} \widetilde{G}_{k-2}.$$

Тогда при $G_{k-2} = BG_{k-1} \dot{+} \widetilde{G}_{k-2}$ будет выполнено

$$\operatorname{Ker} B^{k-2} = \operatorname{Ker} B^{k-3} \dot{+} G_{k-2}, \quad BG_{k-1} \subset G_{k-2}.$$

Итак, проверим 1). Пусть $x \in G_{k-1} \subset \operatorname{Ker} B^{k-1}$. Тогда $B^{k-1}x = \mathbf{0}$. Следовательно, $Bx \in \operatorname{Ker} B^{k-2}$.

Проверим 2). Пусть $y \in BG_{k-1} \cap \operatorname{Ker} B^{k-3}$. Тогда существует $x \in G_{k-1}$ такой, что $y = Bx$. При этом $y = Bx \in \operatorname{Ker} B^{k-3}$.

Следовательно, $B^{k-2}x = \mathbf{0}$, то есть, $x \in \operatorname{Ker} B^{k-2}$. По нашему предположению, $G_{k-1} \cap \operatorname{Ker} B^{k-2} = \{\mathbf{0}\}$. Следовательно, $x = \mathbf{0}$.

На последнем шаге мы придем к соотношениям

$$\operatorname{Ker} B^2 = \operatorname{Ker} B \dotplus G_2, \quad \operatorname{Ker} B = G_1, \quad BG_2 \subset G_1. \qquad \square$$

В итоге мы пришли к разложению пространства E в прямую сумму подпространств G_j:

$$\begin{aligned} E = \operatorname{Ker} B^m = \operatorname{Ker} B^{m-1} \dotplus G_m = \operatorname{Ker} B^{m-2} \dotplus G_{m-1} \dotplus G_m = \\ = \cdots = G_1 \dotplus G_2 \dotplus \cdots \dotplus G_m. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Обозначим $k_j := \dim G_j$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда

$$\begin{aligned} &k_j = \dim \operatorname{Ker} B^j - \dim \operatorname{Ker} B^{j-1}, \quad j = 2, \ldots, m; \\ &k_1 = \dim \operatorname{Ker} B. \end{aligned}$$

С учетом леммы 4.2 и (4.6) имеем

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, \quad k_j > 0.$$

Лемма 4.5. *Пусть $x_1, \ldots, x_s \in G_j$ — линейно независимый набор. Здесь $j \geqslant 2$. Тогда набор $Bx_1, \ldots, Bx_s \in G_{j-1}$ также является линейно независимым.*

Доказательство. Предположим, что

$$\alpha_1 Bx_1 + \alpha_2 Bx_2 + \cdots + \alpha_s Bx_s = \mathbf{0}.$$

Тогда $B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_s x_s) = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_s x_s \in \operatorname{Ker} B = G_1.$$

С другой стороны, по условию $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_s x_s \in G_j$ при $j \geqslant 2$. Поскольку $G_j \cap G_1 = \{\mathbf{0}\}$, то $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_s x_s = \mathbf{0}$. По условию, набор $x_1, \ldots, x_s$ линейно независимый. Следовательно, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$. $\square$

Следствие 4.6. *Размерности* $k_j = \dim G_j$ *удовлетворяют неравенствам*

$$0 < k_m \leqslant k_{m-1} \leqslant \ldots \leqslant k_2 \leqslant k_1.$$

Перейдем теперь к *доказательству теоремы* 4.1. Построим жорданов базис для оператора B, опираясь на разложение

$$E = G_1 \dotplus G_2 \dotplus \cdots \dotplus G_{m-1} \dotplus G_m,$$

и вложения $BG_j \subset G_{j-1}$.

Шаг 1. Выберем какой-либо базис

$$g_1^{(m)}, \ldots, g_{k_m}^{(m)}$$

в подпространстве G_m.

Шаг 2. Рассмотрим векторы

$$Bg_1^{(m)} =: g_1^{(m-1)}, \ldots, Bg_{k_m}^{(m)} =: g_{k_m}^{(m-1)} \in G_{m-1}.$$

В силу леммы 4.5 этот набор линейно независим. Дополним его как-либо до базиса в G_{m-1}:

$$g_1^{(m-1)}, \ldots, g_{k_m}^{(m-1)}; g_{k_m+1}^{(m-1)}, \ldots, g_{k_{m-1}}^{(m-1)}.$$

(Разумеется, в случае $k_{m-1} = k_m$ дополнять не требуется.)

Продолжаем процесс. На l-ом шаге будут построены базисы в подпространствах $G_m, G_{m-1}, \ldots, G_{m-l+1}$. При этом базис в G_j $(j = m-1, \ldots, m-l+1)$ имеет вид

$$g_1^{(j)}, \ldots, g_{k_j}^{(j)}, \text{ причем } g_i^{(j)} = Bg_i^{(j+1)}, \quad i = 1, \ldots, k_{j+1}.$$

При этом используется такой термин: если $g_i^{(j)} = Bg_i^{(j+1)}$, то вектор $g_i^{(j+1)}$ называют присоединенным к вектору $g_i^{(j)}$.

Шаг $l+1$. Мы рассматриваем векторы

$$Bg_1^{(m-l+1)} =: g_1^{(m-l)}, \ldots, Bg_{k_{m-l+1}}^{(m-l+1)} =: g_{k_{m-l+1}}^{(m-l)} \in G_{m-l}.$$

В силу леммы 4.5 этот набор линейно независим. Дополним его как-либо до базиса в G_{m-l}:

$$g_1^{(m-l)}, \dots, g_{k_{m-l+1}}^{(m-l)}; g_{k_{m-l+1}+1}^{(m-l)}, \dots, g_{k_{m-l}}^{(m-l)}.$$

Всего требуется m шагов. Объединение базисов, построенных в подпространствах $G_m, \dots, G_1$, после правильной перенумерации и будет жордановым базисом. Изображающую матрицу оператора B в этом базисе обозначим $b \in M^n$. Она по построению будет иметь блочно-диагональный вид.

Нумерацию следует начать с группы 1:

$$g_{k_2+1}^{(1)}, \dots, g_{k_1}^{(1)} \in G_1 = \operatorname{Ker} B.$$

Это собственные векторы, у которых нет присоединенных. В матрице b каждому вектору из группы 1 отвечает жорданова клетка (0) размера 1×1 (поскольку $Bg_i^{(1)} = \mathbf{0}$). Итого имеем $(k_1 - k_2)$ клеток размера 1×1.

Группа 2: рассматриваем пары

$$g_{k_3+1}^{(1)}, g_{k_3+1}^{(2)}; \dots; g_{k_2}^{(1)}, g_{k_2}^{(2)}.$$

Это пары из собственных векторов и присоединенных к ним: $Bg_i^{(1)} = \mathbf{0}$, $Bg_i^{(2)} = g_i^{(1)}$. В матрице b каждой паре из группы 2 отвечает жорданова клетка размера 2×2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итого имеем $(k_2 - k_3)$ клеток размера 2×2.

Группа 3: рассматриваем тройки

$$g_{k_4+1}^{(1)}, g_{k_4+1}^{(2)}, g_{k_4+1}^{(3)}; \dots; g_{k_3}^{(1)}, g_{k_3}^{(2)}, g_{k_3}^{(3)}.$$

Это тройки из собственных векторов, присоединенных к ним и присоединенных к присоединенным:

$$Bg_i^{(1)} = \mathbf{0}, \quad Bg_i^{(2)} = g_i^{(1)}, \quad Bg_i^{(3)} = g_i^{(2)}.$$

В матрице b каждой тройке из группы 3 отвечает жорданова клетка размера 3×3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итого имеем $(k_3 - k_4)$ клеток размера 3×3.

И так далее. Последняя группа с номером m, в нее входят наборы из m векторов:

$$g_1^{(1)}, g_1^{(2)}, \ldots, g_1^{(m)}; \ldots; g_{k_m}^{(1)}, g_{k_m}^{(2)}, \ldots, g_{k_m}^{(m)}.$$

При этом $Bg_i^{(1)} = \mathbf{0}$, $Bg_i^{(2)} = g_i^{(1)}, \ldots,$ $Bg_i^{(m)} = g_i^{(m-1)}$. Каждому набору из m-й группы отвечает жорданова клетка порядка m:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M^m.$$

Всего k_m клеток размера $m \times m$.

Итак, матрица b имеет жорданову форму и состоит из $(k_1 - k_2)$ клеток размера 1×1, $(k_2 - k_3)$ клеток размера 2×2, $(k_3 - k_4)$ клеток размера 3×3, и т. д., $(k_{m-1} - k_m)$ клеток размера $(m-1) \times (m-1)$, k_m клеток размера $m \times m$. Напомним, что числа k_j определяются размерностями ядер:

$$k_1 = \dim \operatorname{Ker} B, \quad k_2 = \dim \operatorname{Ker} B^2 - \dim \operatorname{Ker} B, \ \ldots,$$
$$k_m = \dim \operatorname{Ker} B^m - \dim \operatorname{Ker} B^{m-1}.$$

Тем самым количество жордановых клеток различного размера в матрице b определяется инвариантными величинами (размерностями ядер степеней оператора B).

Поясним, каким способом можно установить единственность жордановой матрицы b (с точностью до перестановки клеток). Для этого надо предположить, что в каком-то базисе изображающая матрица $b \in M^n$ оператора B имеют жорданову форму. Поскольку оператор B имеет единственное собственное значение $\lambda = 0$, то b состоит из одного ящика, в котором имеются несколько жордановых клеток разного порядка. Рассматривая степени $b, b^2, \ldots, b^{m-1}, b^m = \mathbf{0}$, можно показать, что количество клеток различного порядка определяется именно так, как было описано выше (в терминах размерностей ядер операторов $B, B^2, \ldots, B^m$). Из этого вытекает единственность. Мы не будем описывать эту часть доказательства детально.

Это завершает *доказательство теоремы* 4.1.

В завершение вернемся к общему случаю (теорема 1.5). Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in \Lambda(E)$ — произвольный оператор. Для построения жорданова базиса оператора A сначала надо определить его различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ и их алгебраические кратности $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$. Заранее можно сказать, что жорданова матрица будет состоять из p ящиков порядков $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$, отвечающих $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Применяем теорему разложения по корневым подпространствам

$$E = E(\lambda_1) \dotplus E(\lambda_2) \dotplus \cdots \dotplus E(\lambda_p).$$

В каждом подпространстве $E(\lambda_j)$ строится свой жорданов базис для оператора $A_j = A|_{E(\lambda_j)}$. Объединение этих базисов дает жорданов базис в E для оператора A. Для построения жорданова базиса в $E(\lambda_j)$ применяется теорема 4.1 к нильпотентному оператору $B_j = A_j - \lambda_j I$. Изображающая матрица для оператора A_j отличается от изображающей матрицы для оператора B_j только тем, что на диагонали стоит λ_j вместо нуля. Из доказательства теоремы 4.1 ясно, что устройство j-го ящика в жордановой матрице определяется инвариантными величинами — размерностями ядер степеней оператора B_j.

Список литературы

[1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Линейная алгебра*, *выпуск* 1. *Матрицы. Определители.* Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 1999. – 41 с.

[2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., Фаддеев М. М., *Линейная алгебра*, *выпуск* 2. *Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений.* Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 1999. – 49 с.

[3] Суслина Т. А., *Линейная алгебра. II семестр*, *выпуск* 1. Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 76 с.

[4] Суслина Т. А., *Линейная алгебра. II семестр*, *выпуск* 2. Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 35 с.

[5] Суслина Т. А., *Линейная алгебра. II семестр*, *выпуск* 3. Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 39 с.

[6] Суслина Т. А., *Линейная алгебра. II семестр*, *выпуск* 4. Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 84 с.