САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

Т. А. Суслина

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
II СЕМЕСТР
Выпуск 4

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2021 г.

• Рецензенты: проф., д.ф.-м.н. Ф. В. Петров;
к.ф.-м.н. Н. Н. Сеник.

• Печатается по решению учебно-методической комиссии физического факультета СПбГУ.

Т. А. Суслина.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. II СЕМЕСТР. Выпуск 4. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 84 с.

Настоящее пособие содержит теоретический материал по курсу "Высшая алгебра", который читается во втором семестре студентам первого курса физического факультета СПбГУ. Выпуск 4 содержит главу 4 "Вещественные евклидовы пространства" и главу 5 "Комплексные евклидовы пространства". Пособие может быть полезно преподавателям, ведущим занятия по курсу "Высшая алгебра", а также студентам, изучающим этот предмет.

Выпуск 4 является продолжением выпусков 1, 2, 3 учебно-методического пособия “Линейная алгебра. II семестр” (см. [3,4,5]), основанного на курсе лекций для студентов физического факультета СПбГУ. Выпуск 4 содержит главу 4 “Вещественные евклидовы пространства” и главу 5 “Комплексные евклидовы пространства”. В каждой главе нумерация параграфов и утверждений независимая. При ссылках на утверждения из других глав мы указываем номер главы.

Глава 4. Вещественные евклидовы пространства

§ 1. Геометрия евклидова пространства

1.1. **Основные понятия.**

Определение 1.1. *Множество E называется вещественным евклидовым пространством, если*

1) E *— конечномерное линейное пространство над полем* $\mathbb{R}$ $(\dim E = n)$;

2) *выделена симметричная билинейная форма* $Q \in \mathcal{F}(E)$ *с индексами инерции* $n_+ = n$, $n_- = 0$, *называемая скалярным произведением векторов*:

$$(x, y) := Q(x, y), \quad x, y \in E.$$

Свойства скалярного произведения

• Билинейность:

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y),\ x_1, x_2, y \in E,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$
$$(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x, y_1) + \mu(x, y_2),\ x, y_1, y_2 \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

• Симметричность:

$$(x, y) = (y, x), \quad x, y \in E.$$

• Положительная определенность:

$$(x, x) > 0 \quad \forall x \neq \mathbf{0}.$$

Первые два свойства следуют из того, что скалярное произведение — это симметричная билинейная форма. Третье свойство следует из предположения об индексах инерции: в некотором базисе **e** квадратичная форма $(x, x) = Q(x, x)$ имеет вид

$$(x, x) = \sum_{k=1}^{n} q_k (\xi^k)^2, \quad x = \sum_{l=1}^{n} \xi^l e_l,$$

причем все коэффициенты q_k положительны. Если $x \neq \mathbf{0}$, то хотя бы одна координата ξ^l отлична от нуля, а тогда $(x, x) > 0$.

Замечание. Обратим внимание, что евклидово пространство по определению конечномерно. В бесконечномерном случае используется другой термин — гильбертово пространство.

В этом параграфе *предполагаем, что E — вещественное евклидово пространство*, причем $n = \dim E \geqslant 1$.

Определение 1.2. *Говорят, что элементы $x, y \in E$ ортогональны и пишут $x \perp y$, если $(x, y) = 0$.*

Определение 1.3. *Нормой элемента $x \in E$ называется число $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$.*

Имеется ввиду арифметическое значение корня, так что $\|x\| \geqslant 0$.

Отметим несколько простых свойств:

- Нулевой вектор ортогонален любому вектору x:

$$(\mathbf{0}, x) = 0 \quad \forall x \in E. \tag{1.1}$$

  Это свойство вытекает из линейности скалярного произведения по первому аргументу. Имеем $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{0}$ и $(\mathbf{0}, x) = (0 \cdot \mathbf{0}, x) = 0 \cdot (\mathbf{0}, x) = 0$.

- Справедливо тождество

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2, \quad x, y \in E. \tag{1.2}$$

Действительно, в силу билинейности и симметричности скалярного произведения,

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = \\ = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2.$$

Отсюда вытекает “теорема Пифагора”:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \quad \text{если } x \perp y.$$

Предложение 1.4. *Если $x \perp y$ при любом $y \in E$, то $x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Дано: $(x,y) = 0$ при любом $y \in E$. Возьмем $y = x$. Тогда $(x,x) = 0$. В силу свойства положительной определенности отсюда следует, что $x = \mathbf{0}$. □

Определение 1.5. *Базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E называется ортогональным, если элементы базиса попарно ортогональны, то есть $(e_j, e_k) = 0$ при $j \neq k$.*

Определение 1.6. *Базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E называется ортонормированным, если*

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Элементы ортонормированного базиса попарно ортогональны и нормированы: $\|e_k\| = 1$, $k = 1, \ldots, n$.

Предложение 1.7. 1) *В вещественном евклидовом пространстве E существует ортонормированный базис.*

2) *Если $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис в E и $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$, то*

$$\xi^j = (x, e_j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

3) *Если $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис в E и $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$, $y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l$, то*

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \eta^k, \quad \|x\|^2 = (x,x) = \sum_{k=1}^{n} (\xi^k)^2.$$

Доказательство. 1) Симметричную билинейную форму (x, y) с индексами инерции $n_+ = n$, $n_- = 0$ можно привести к сумме одноименных произведений с коэффициентами $q_k = 1$, $k = 1, \ldots, n$ (см. [5], гл. 3, пункт 3.3). Это означает, что существует такой базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, в котором

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \eta^k, \quad x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j, \ y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l.$$

Подставляя в эту формулу $x = e_m$, $y = e_p$, автоматически получаем $(e_m, e_p) = \sum_{k=1}^{n} \delta_m^k \delta_p^k = \delta_{mp}$. Следовательно, базис $\mathbf{e}$ — ортонормированный.

2) Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E и $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$. Имеем:

$$(x, e_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, e_j \right) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k (e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \delta_{kj} = \xi^j.$$

Мы воспользовались линейностью скалярного произведения по первому аргументу и соотношением $(e_k, e_j) = \delta_{kj}$.

3) Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E и $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$, $y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l$. Имеем:

$$(x, y) = \left(x, \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l \right) = \sum_{l=1}^{n} \eta^l (x, e_l) = \sum_{l=1}^{n} \xi^l \eta^l.$$

Мы воспользовались линейностью скалярного произведения по второму аргументу и уже доказанным равенством $(x, e_l) = \xi^l$. $\square$

Примеры вещественных евклидовых пространств

- $E = \mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{j=1}^{n} \xi^j \eta^j, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$

Пример ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$ — стандартный базис

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E = M^n$ — пространство матриц с вещественными элементами. Скалярное произведение вводится по формуле

$$(a, b) = \operatorname{Tr} ab^t, \quad a, b \in M^n.$$

Проверьте равенство

$$(a, b) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}. \tag{1.3}$$

Билинейность скалярного произведения проверяется с помощью линейности следа. Проверим линейность по первому аргументу:

$$\begin{aligned} &(\alpha a + \beta c, b) = \operatorname{Tr}(\alpha a + \beta c) b^t = \\ &= \alpha \operatorname{Tr} ab^t + \beta \operatorname{Tr} cb^t = \alpha(a, b) + \beta(c, b). \end{aligned}$$

Аналогично проверяется линейность по второму аргументу. Проверим симметричность скалярного произведения:

$$(a, b) = \operatorname{Tr} ab^t = \operatorname{Tr}(ab^t)^t = \operatorname{Tr} ba^t = (b, a).$$

Положительная определенность следует из (1.3):

$$(a, a) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 > 0, \quad \text{если } a \neq \mathbf{0}.$$

Проверьте, что “матричные единицы” образуют ортонормированный базис в M^n.

- $E = \Omega_{n-1}$ — пространство многочленов степени не выше $n-1$ с вещественными коэффициентами. Введем скалярное произведение по формуле

$$(P_1, P_2) = \int\limits_{-1}^{1} P_1(t)P_2(t)\,dt.$$

Убедитесь, что все свойства скалярного произведения выполнены.

Отметим, что стандартный базис $\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}\}$ в Ω_{n-1} не является ортогональным (при $n \geqslant 3$). Ортогональный базис образуют полиномы Лежандра, которые получаются из стандартного базиса применением процесса ортогонализации (см. пункт 1.2 ниже).

Предложение 1.8. *В вещественном евклидовом пространстве E скалярное произведение векторов по абсолютной величине не превосходит произведения норм этих векторов:*

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad x, y \in E. \tag{1.4}$$

Неравенство (1.4) известно как *неравенство Коши* (или Коши–Буняковского–Шварца).

Доказательство. Если $x = \mathbf{0}$ или $y = \mathbf{0}$, то неравенство очевидно (обе части неравенства равны нулю).

Предположим, что $x \neq \mathbf{0}$ и $y \neq \mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис в E. Разложим векторы x и y по данному базису: $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$, $y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l$. В силу предложения 1.7 имеем $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \eta^k$. Следовательно,

$$2|(x, y)| = 2\Big|\sum_{k=1}^{n} \xi^k \eta^k\Big| \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha}|\xi^k| \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}|\eta^k| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \sum_{k=1}^{n} (\xi^k)^2 + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} (\eta^k)^2 = \alpha\|x\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|y\|^2.$$

Здесь $\alpha > 0$ — любое число. Мы домножили и поделили на $\sqrt{\alpha}$ и воспользовались неравенством $2ab \leqslant a^2 + b^2$. Удобно выбрать $\alpha = \frac{\|y\|}{\|x\|}$. При таком выборе получаем $2|(x, y)| \leqslant 2\|x\|\|y\|$. □

Неравенство Коши позволяет дать корректное определение угла между векторами в вещественном евклидовом пространстве.

Определение 1.9. *Пусть $x, y \in E$, причем $x \neq \mathbf{0}$, $y \neq \mathbf{0}$. По определению, косинус угла φ между векторами x, y равен скалярному произведению этих векторов, поделенному на произведение их норм*:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}. \tag{1.5}$$

В силу неравенства Коши модуль правой части в (1.5) не превосходит единицы. Сам угол φ определяется неоднозначно:

$$\varphi = \pm \arccos\left(\frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}\right) + 2\pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Часто фиксируют выбор угла так, чтобы угол был положительным и минимальным. Тогда

$$\varphi = \arccos\left(\frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}\right).$$

Свойства нормы

- Однородность:

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad x \in E, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Свойство вытекает из определения нормы и из билинейности скалярного произведения:

$$\|\alpha x\|^2 = (\alpha x, \alpha x) = \alpha^2 (x, x) = \alpha^2 \|x\|^2.$$ □

- Неравенство треугольника:

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in E.$$

Доказательство. Свойство вытекает из тождества (1.2) и из неравенства Коши:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \qquad \square$$

- Положительная определенность:

$$\|x\| \geqslant 0 \ \forall x \in E; \quad \|x\| > 0,\ x \neq \mathbf{0}; \quad \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Неотрицательность $\|x\|$ вытекает из определения нормы. Положительность $\|x\|$ при $x \neq \mathbf{0}$ следует из положительной определенности скалярного произведения: $(x,x) > 0$. С учетом (1.1) получаем, что $\|x\| = 0$ только при $x = \mathbf{0}$. $\square$

1.2. **Процесс ортогонализации.**

Предложение 1.10. *Пусть $f_1, \ldots, f_p \in E$, причем $f_j \neq \mathbf{0}$, $j = 1, \ldots, p$, и $f_j \perp f_k$ при $j \neq k$. Тогда $\{f_1, \ldots, f_p\}$ — линейно независимый набор в E.*

Доказательство. Предположим, что $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k = \mathbf{0}$. Домножим это равенство скалярно на f_j:

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k (f_k, f_j) = (\mathbf{0}, f_j) = 0.$$

Поскольку $(f_k, f_j) = 0$ при $k \neq j$, слева остается всего одно слагаемое: $\alpha_j \|f_j\|^2 = 0$. В силу $\|f_j\| > 0$, получаем $\alpha_j = 0$. Это верно при всех $j = 1, \ldots, p$. Значит, набор $\{f_1, \ldots, f_p\}$ линейно независим. $\square$

Автоматически в условиях предложения 1.10 выполнено $p \leqslant n$.

Опишем теперь *процесс ортогонализации*, который позволяет по заданному базису построить новый ортонормированный базис.

Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — некоторый базис в E. Положим

$$e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1.$$

Тогда $\|e_1\| = 1$. Если $n = 1$, новый базис построен. Если $n > 1$, то рассмотрим вектор

$$\widetilde{e}_2 := f_2 - (f_2, e_1) e_1.$$

Заведомо, $\widetilde{e}_2 \neq \mathbf{0}$, поскольку $\widetilde{e}_2$ является линейной комбинацией линейно независимых векторов f_1, f_2, причем коэффициент при f_2 равен 1. Вектор $\widetilde{e}_2$ ортогонален к e_1:

$$(\widetilde{e}_2, e_1) = (f_2 - (f_2, e_1) e_1, e_1) = (f_2, e_1) - (f_2, e_1)(e_1, e_1) = 0,$$

поскольку $(e_1, e_1) = 1$. Нормируем вектор $\widetilde{e}_2$:

$$e_2 = \frac{1}{\|\widetilde{e}_2\|} \widetilde{e}_2.$$

Если $n = 2$, то ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$ построен. Если $n > 2$, делаем следующий шаг. Рассмотрим вектор

$$\widetilde{e}_3 := f_3 - (f_3, e_1) e_1 - (f_3, e_2) e_2.$$

Вектор $\widetilde{e}_3$ является линейной комбинацией линейно независимых векторов f_1, f_2, f_3, причем коэффициент при f_3 равен 1. Поэтому $\widetilde{e}_3 \neq \mathbf{0}$. Вектор $\widetilde{e}_3$ ортогонален к e_1:

$$\begin{aligned}(\widetilde{e}_3, e_1) &= (f_3 - (f_3, e_1) e_1 - (f_3, e_2), e_1) \\ &= (f_3, e_1) - (f_3, e_1)(e_1, e_1) - (f_3, e_2)(e_2, e_1) = 0,\end{aligned}$$

поскольку $(e_1, e_1) = 1$ и $(e_2, e_1) = 0$. Аналогично проверяется, что $\widetilde{e}_3$ ортогонален к e_2. Нормируем вектор $\widetilde{e}_3$:

$$e_3 = \frac{1}{\|\widetilde{e}_3\|} \widetilde{e}_3.$$

Если $n = 3$, то ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ построен. Если $n > 3$, то продолжаем процесс.

Всего требуется сделать n шагов. В результате будет построен ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ такой, что

$$\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k) = \mathcal{L}(f_1, \ldots, f_k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

1.3. **Ортогональная сумма. Ортогональное дополнение.**

Определение 1.11. *Подпространства F и G в вещественном евклидовом пространстве E называются ортогональными (пишем $F \perp G$), если $(f, g) = 0$ при любых $f \in F$ и $g \in G$.*

Предложение 1.12. *Пусть F и G — ортогональные подпространства в вещественном евклидовом пространстве E. Тогда $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$, и, следовательно, линейная сумма $F + G$ является прямой суммой.*

Доказательство. Пусть $x \in F \cap G$. Поскольку любой элемент из F ортогонален любому элементу из G, то x сам себе ортогонален: $(x, x) = \|x\|^2 = 0$. В силу свойства положительной определенности нормы отсюда следует, что $x = \mathbf{0}$. $\square$

Определение 1.13. *Прямая сумма $F \dotplus G$ ортогональных подпространств F и G называется ортогональной суммой и обозначается $F \oplus G$.*

Определение 1.14. *Пусть F — подпространство в вещественном евклидовом пространстве E. Ортогональным дополнением подпространства F называется множество*

$$F^{\perp} := \{g \in E : (g, f) = 0 \ \ \forall f \in F\}.$$

Предложение 1.15. *Пусть F — подпространство в вещественном евклидовом пространстве E и $F^{\perp}$ — ортогональное дополнение подпространства F. Тогда справедливы следующие свойства:*

1) *$F^{\perp}$ — подпространство в E;*
2) *F и $F^{\perp}$ — ортогональные подпространства;*

3) $F \oplus F^{\perp} = E$;
4) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Доказательство. 1) Проверим, что $F^{\perp}$ замкнуто относительно сложения и умножения на число. Пусть $g_1, g_2 \in F^{\perp}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(\alpha g_1 + \beta g_2, f) = \alpha(g_1, f) + \beta(g_2, f) = 0 \quad \forall f \in F.$$

Следовательно, $F^{\perp}$ — подпространство пространства E.

2) Из определения $F^{\perp}$ вытекает, что $F^{\perp} \perp F$.

3) Рассмотрим ортогональную сумму $F \oplus F^{\perp}$ и покажем, что $F \oplus F^{\perp} = E$. Требуется проверить, что любой элемент $x \in E$ можно представить в виде $x = f + g$, где $f \in F$ и $g \in F^{\perp}$.

Если $F = \{\mathbf{0}\}$, то $F^{\perp} = E$ и утверждение очевидно. Если $F \neq \{\mathbf{0}\}$, то выберем какой-либо ортонормированный базис $\{f_1, \ldots, f_m\}$ в F (здесь $m = \dim F$). Положим

$$f = \sum_{j=1}^{m} (x, f_j) f_j, \quad g = x - f. \tag{1.6}$$

Тогда $f \in F$. Проверим, что $g \in F^{\perp}$:

$$(g, f_k) = \Bigl(x - \sum_{j=1}^{m} (x, f_j) f_j, f_k\Bigr) = (x, f_k) - \sum_{j=1}^{m} (x, f_j)(f_j, f_k) =$$

$$= (x, f_k) - \sum_{j=1}^{m} (x, f_j)\delta_{jk} = (x, f_k) - (x, f_k) = 0$$

при $k = 1, \ldots, m$. Следовательно, $(g, f) = 0$ при любом $f \in F$, то есть $g \in F^{\perp}$.

4) Очевидно, $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$, поскольку любой вектор из F ортогонален ко всякому вектору из $F^{\perp}$. Далее, $\dim F^{\perp} = n - m$, а потому $\dim (F^{\perp})^{\perp} = n - (n - m) = m$. Таким образом, F является подпространством в $(F^{\perp})^{\perp}$ и $\dim F = \dim (F^{\perp})^{\perp}$. Отсюда следует, что $F = (F^{\perp})^{\perp}$. $\square$

Определение 1.16. *Пусть F — подпространство в вещественном евклидовом пространстве E и $F^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Для элемента $x \in E$ в представлении $x = f + g$, где $f \in F$, $g \in F^{\perp}$, элемент f называется ортогональной проекцией x на F, а g называется ортогональной составляющей.*

1.4. **Изоморфизм вещественных евклидовых пространств.**

Определение 1.17. *Пусть E_1 и E_2 — два вещественных евклидовых пространства. Говорят, что E_2 изоморфно E_1, если существует линейное взаимно-однозначное отображение $J : E_1 \to E_2$, такое что*

$$(Jx, Jy)_{E_2} = (x, y)_{E_1} \quad \forall x, y \in E_1.$$

Проверьте самостоятельно, что изоморфизм — это отношение эквивалентности на классе всех вещественных евклидовых пространств.

Очевидно, если E_2 изоморфно E_1 в смысле данного определения, то автоматически E_1 и E_2 будут изоморфными линейными пространствами.

Теорема 1.18. *Любое вещественное евклидово пространство размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Зафиксируем ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в E. Рассмотрим отображение $J : E \to \mathbb{R}^n$, определенное по правилу:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k \;\mapsto\; Jx = \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Мы знаем, что это отображение линейное и взаимно-однозначное. Проверим, что J сохраняет скалярное произведение.

Пусть $x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k$ и $y = \sum_{l=1}^n \eta^l e_l$. В силу предложения 1.7 в ортонормированном базисе скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(x, y)_E = \sum_{k=1}^n \xi^k \eta^k.$$

Имеем:

$$Jx = \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad Jy = \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$

По определению скалярного произведения векторов в $\mathbb{R}^n$ выполнено

$$(Jx, Jy)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^n \xi^k \eta^k.$$

Следовательно,

$$(x, y)_E = (Jx, Jy)_{\mathbb{R}^n}, \quad x, y \in E. \qquad \square$$

§ 2. Линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве

2.1. **Линейные операторы и билинейные формы.** Мы установим взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и билинейными формами в вещественном евклидовом пространстве E.

Определение 2.1. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Пусть $A \in \Lambda(E)$. Билинейной формой оператора A называется форма $Q_A \in \mathcal{F}(E)$, определенная по правилу*

$$Q_A(x, y) := (Ax, y), \quad x, y \in E. \tag{2.1}$$

Предложение 2.2. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Отображение $J : \Lambda(E) \to \mathcal{F}(E)$, определенное по правилу $JA = Q_A$, где Q_A определено в (2.1), является изоморфизмом линейных пространств $\Lambda(E)$ и $\mathcal{F}(E)$.*

Доказательство. Сначала проверим, что отображение J — линейное, то есть,

$$Q_{\alpha A+\beta B} = \alpha Q_A + \beta Q_B \quad \forall A, B \in \Lambda(E),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

При любых $x, y \in E$ имеем:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha A+\beta B}(x,y) = ((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \\ = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) = \alpha Q_A(x,y) + \beta Q_B(x,y) = \\ = (\alpha Q_A + \beta Q_B)(x,y). \end{aligned}$$

Сначала мы использовали определение (2.1), затем определение линейных операций над операторами. В третьем переходе учтена линейность скалярного произведения по первому аргументу, затем снова использовано определение (2.1) и, наконец, определение линейных операций над формами. Равенство (2.2) доказано.

Мы знаем, что $\dim \Lambda(E) = n^2$ и $\dim \mathcal{F}(E) = n^2$. Тогда для проверки того, что линейный оператор J является изоморфизмом, достаточно проверить тривиальность ядра $\operatorname{Ker} J$. (См. [3], следствие 6.20 из главы 1).

Пусть $A \in \operatorname{Ker} J$, то есть $JA = Q_A = \mathbf{0}_{\mathcal{F}(E)}$. Это означает, что $Q_A(x,y) = 0$ при любых $x, y \in E$. Тогда $(Ax, y) = 0$ при любых $x, y \in E$.

Сначала фиксируем $x \in E$. Вектор Ax ортогонален любому вектору $y \in E$. Следовательно, $Ax = \mathbf{0}$. Поскольку это верно для всякого $x \in E$, получаем что $A = \mathbf{0}_{E\to E}$. Мы убедились, что $\operatorname{Ker} J$ тривиально. $\square$

Следствие 2.3. *В вещественном евклидовом пространстве E для любой билинейной формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ существует единственный оператор $A \in \Lambda(E)$, такой что $Q = Q_A$, то есть $Q(x,y) = (Ax, y)$ при любых $x, y \in E$.*

Предложение 2.4. *Пусть E — вещественное евклидово пространство и $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормированный базис в E. Пусть $A \in \Lambda(E)$ и $a \in M^n$ — изображающая* *матрица оператора A в базисе* $\mathbf{e}$. *Пусть $Q = Q_A \in \mathcal{F}(E)$ — билинейная форма оператора A, а $q \in M^n$ — изображающая матрица формы Q_A в базисе* $\mathbf{e}$. *Тогда $a = q$.*

Доказательство. Элементы изображающей матрицы

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

оператора A определяются следующим образом: α_k^l — это l-я координата вектора Ae_k. В силу предложения 1.7 в ортонормированном базисе l-я координата вектора равна скалярному произведению этого вектора на орт e_l. Следовательно,

$$\alpha_k^l = (Ae_k, e_l), \quad k, l = 1, \dots, n.$$

С другой стороны элементы изображающей матрицы

$$q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

формы Q_A определяются следующим образом:

$$q_{kl} = Q_A(e_k, e_l), \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Поскольку $Q_A(e_k, e_l) = (Ae_k, e_l)$, получаем

$$q_{kl} = \alpha_k^l, \quad k, l = 1, \dots, n,$$

то есть $q = a$. □

Замечание. 1) Если базис $\mathbf{e}$ не ортонормированный, то утверждение неверно. То есть $a \neq q$ в общем случае.
2) Предложение 2.4 дает конструктивный способ построить оператор A по заданной форме Q. Надо найти изображающую матрицу q формы Q в каком-либо ортонормированном базисе и построить оператор A, имеющий ту же изображающую матрицу $a = q$ в этом базисе.

2.2. **Сопряженный (транспонированный) оператор.**

Определение 2.5. *Пусть $A \in \Lambda(E)$. Оператор $B \in \Lambda(E)$ называется сопряженным (или транспонированным) к оператору A, если $(Ax, y) = (x, By)$ при любых $x, y \in E$.*

Предложение 2.6. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Для любого оператора $A \in \Lambda(E)$ существует единственный сопряженный оператор $B \in \Lambda(E)$.*

Доказательство. Сначала докажем существование сопряженного оператора. Оператору A отвечает билинейная форма Q_A. Рассмотрим транспонированную форму Q_A^t. Ей отвечает оператор B. Проверим, что B является сопряженным к оператору A. Имеем:

$$(Ax, y) = Q_A(x, y) = Q_A^t(y, x) = (By, x) = (x, By), \ x, y \in E.$$

Теперь докажем единственность сопряженного оператора. Пусть B и $\widetilde{B}$ — сопряженные к A операторы. Тогда $(Ax, y) = (x, By)$ и $(Ax, y) = (x, \widetilde{B}y)$ при любых $x, y \in E$. Следовательно, $(x, By - \widetilde{B}y) = 0$ при любых $x, y \in E$.

Тогда при фиксированном y вектор $By - \widetilde{B}y$ ортогонален любому вектору $x \in E$. Значит, $By = \widetilde{B}y$. Это верно при всяком y. Следовательно, $B = \widetilde{B}$. □

Для сопряженного (транспонированного) оператора к оператору A используем обозначение $B = A^t = A^*$.

Свойства транспонированного оператора

- Линейность операции транспонирования:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)^t = \alpha A_1^t + \beta A_2^t, \quad A_1, A_2 \in \Lambda(E), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

  Проверьте самостоятельно.

- Выполнено равенство

$$(A^t)^t = A.$$

  Очевидно.

- Правило транспонирования композиции операторов:

$$(AC)^t = C^t A^t, \quad A, C \in \Lambda(E).$$

Доказательство. Свойство следует из выкладки

$$(ACx, y) = (Cx, A^t y) = (x, C^t A^t x, y) \quad \forall x, y \in E. \qquad \square$$

- Выполнено равенство

$$I^t = I.$$

Очевидно.

- Если $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E, $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$, то изображающей матрицей оператора A^t в базисе $\mathbf{e}$ служит a^t.

Доказательство. Элемент α_k^l изображающей матрицы a — это l-я координата вектора Ae_k. В силу предложения 1.7 выполнено

$$\alpha_k^l = (Ae_k, e_l), \quad k, l = 1, \ldots, n.$$

Пусть b — изображающая матрица оператора $B = A^t$ в базисе $\mathbf{e}$. Элемент β_l^k матрицы b — это k-я координата вектора Be_l. Из предложения 1.7 следует равенство

$$\beta_l^k = (Be_l, e_k), \quad k, l = 1, \ldots, n.$$

Остается учесть, что по определению транспонированного оператора выполнено $(Ae_k, e_l) = (e_k, Be_l) = (Be_l, e_k)$. Следовательно, $\alpha_k^l = \beta_l^k$ при $l, k = 1, \ldots, n$, то есть $b = a^t$. $\square$

- У операторов A и A^t совпадают следы, определители, характеристические многочлены, спектры:

$$\operatorname{Tr} A^t = \operatorname{Tr} A, \quad \det A^t = \det A,$$
$$d_{A^t}(\lambda) = d_A(\lambda), \quad \operatorname{spec} A^t = \operatorname{spec} A.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E, $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$. Тогда для A^t изображающей матрицей в том же базисе служит a^t.

По определению, след, определитель и характеристический многочлен оператора совпадают со следом, определителем и характеристическим многочленом его изображающей матрицы. См. [4], §2 в главе 2.

Остается вспомнить, что у матриц a и a^t совпадают следы, определители, характеристические многочлены и собственные значения (корни характеристического многочлена). □

2.3. **Симметричные и антисимметричные операторы.**

Определение 2.7. *Оператор $A \in \Lambda(E)$ называется симметричным, если $A^t = A$, то есть*

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y \in E.$$

Определение 2.8. *Оператор $B \in \Lambda(E)$ называется антисимметричным, если $B^t = -B$, то есть*

$$(Bx, y) = -(x, By) \quad \forall x, y \in E.$$

Замечание. Очевидно, что оператор A симметричен тогда и только тогда, когда его билинейная форма Q_A симметрична. Оператор B антисимметричен тогда и только тогда, когда его билинейная форма Q_B антисимметрична.

Предложение 2.9. *Любой линейный оператор $C \in \Lambda(E)$ однозначно представим в виде $C = A + B$, где A — симметричный, а B — антисимметричный операторы.*

Доказательство. Докажем существование требуемого представления. Пусть дан оператор C. Положим

$$A = \frac{1}{2}(C + C^t), \quad B = \frac{1}{2}(C - C^t). \tag{2.3}$$

Очевидно, $A^t = A$, $B^t = -B$ и $A + B = C$.

Теперь проверим единственность представления. Пусть $C = A + B$, причем $A^t = A$, $B^t = -B$. Тогда $C^t = A^t + B^t = A - B$. Итак,

$$C = A + B, \quad C^t = A - B.$$

Складывая эти равенства, получаем $C + C^t = 2A$. Вычитая второе равенство из первого, приходим к $C - C^t = 2B$. Мы пришли к прежним выражениям (2.3) для A и B. Это доказывает единственность. $\square$

Определение 2.10. *Операторы*

$$A = \frac{1}{2}(C + C^t) \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{2}(C - C^t)$$

называются соответственно симметричной частью и антисимметричной частью оператора C.

Предложение 2.11. *Пусть $B \in \Lambda(E)$ — антисимметричный оператор. Тогда*
1) *квадратичная форма оператора B равна нулю*: $(Bx, x) = 0$ *при любом $x \in E$*;
2) *след оператора B равен нулю*: $\operatorname{Tr} B = 0$;
3) *если $n = \dim E$ — нечетное число, то определитель оператора B равен нулю*: $\det B = 0$.

Доказательство. 1) Поскольку $B^t = -B$, то $(Bx, y) = -(x, By)$ при любых $x, y \in E$. Подставим $y = x$. Тогда $(Bx, x) = -(x, Bx) = -(Bx, x)$. Следовательно, $(Bx, x) = 0$ при любом $x \in E$.

2) Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E. Пусть b — изображающая матрица оператора B в базисе $\mathbf{e}$. Для B^t изображающей матрицей в том же базисе служит b^t. Поэтому равенство $B^t = -B$ означает, что $b^t = -b$, то есть, b — кососимметричная матрица. Все диагональные элементы кососимметричной матрицы равны нулю, а потому $\operatorname{Tr} B = \operatorname{Tr} b = 0$.

3) Вспомним, что при нечетном n определитель кососимметричной матрицы $b \in M^n$ равен нулю, поскольку

$$\det b = \det b^t = \det(-b) = (-1)^n \det b = -\det b.$$

Следовательно, $\det B = \det b = 0$. $\square$

Обсудим вопрос о том, можно ли восстановить оператор по его квадратичной форме. Предложение 2.11 показывает, что для антисимметричного оператора ответ на этот вопрос отрицательный. Противоположным образом обстоит дело для симметричного оператора.

Предложение 2.12. *Пусть $A \in \Lambda(E)$ — симметричный оператор. Тогда оператор A однозначно восстанавливается по своей квадратичной форме.*

Доказательство. Пусть $A \in \Lambda(E)$ — симметричный оператор и пусть $Q_A \in \mathcal{F}(E)$ — отвечающая ему билинейная форма: $Q_A(x, y) = (Ax, y)$, $x, y \in E$. Тогда форма Q_A симметрична.

Предположим, что мы знаем значения квадратичной формы $Q_A(x, x) = (Ax, x)$ при всех $x \in E$. По квадратичной форме однозначно восстанавливается симметричная билинейная форма (см. [5], предложение 2.22 из главы 3). А по билинейной форме однозначно восста-навливается оператор A (см. следствие 2.3). $\square$

Следствие 2.13. *Пусть A и B — симметричные операторы в вещественном евклидовом пространстве E. Предположим, что их квадратичные формы совпадают:*

$$(Ax, x) = (Bx, x) \quad \forall x \in E.$$

Тогда $A = B$.

Замечание. В общем случае по квадратичной форме оператора $C \in \Lambda(E)$ восстанавливается только симметричная часть $A = \frac{1}{2}(C + C^t)$ оператора C.

2.4. **Изометрические операторы.**

Определение 2.14. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Оператор $V \in \Lambda(E)$ называется изометрическим, если V сохраняет скалярное произведение, то есть*

$$(Vx, Vy) = (x, y) \quad \forall x, y \in E. \tag{2.4}$$

Предложение 2.15. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Оператор $V \in \Lambda(E)$ является изометрическим тогда и только тогда, когда V сохраняет норму, то есть*

$$\|Vx\| = \|x\| \quad \forall x \in E. \tag{2.5}$$

Доказательство. Необходимость очевидна: из (2.4) при $y = x$ следует (2.5).

Докажем достаточность. Пусть дано (2.5). Пусть $x, y \in E$. Имеем:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2, \tag{2.6}$$

$$\|V(x + y)\|^2 = \|Vx\|^2 + 2(Vx, Vy) + \|Vy\|^2. \tag{2.7}$$

В силу (2.5) выполнено

$$\|Vx\| = \|x\|, \quad \|Vy\| = \|y\|, \quad \|V(x + y)\| = \|x + y\|.$$

Отсюда и из (2.6), (2.7) следует, что

$$2(Vx, Vy) = \|V(x + y)\|^2 - \|Vx\|^2 - \|Vy\|^2 =$$
$$= \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2(x, y).$$

Мы показали, что выполнено (2.4). Это означает, что V — изометрический оператор. □

Следствие 2.16. *Изометрический оператор V является автоморфизмом пространства E.*

Доказательство. Для доказательства того, что V — автоморфизм, достаточно убедиться, что его ядро тривиально. Пусть $x \in \operatorname{Ker} V$, то есть $Vx = \mathbf{0}$. Тогда $\|Vx\| = 0$. В силу

(2.5) отсюда следует, что $\|x\| = 0$. С учетом положительной определенности нормы это означает, что $x = \mathbf{0}$. Мы убедились, что $\operatorname{Ker} V = \{\mathbf{0}\}$. □

Предложение 2.17. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Пусть $V \in \Lambda(E)$. Следующие свойства равносильны*:

1) V — *изометрический оператор*;
2) $V^t V = I$;
3) $V V^t = I$;
4) $V^{-1} = V^t$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Дано: V — изометрический оператор, то есть, $(Vx, Vy) = (x, y)$ при любых $x, y \in E$. Тогда $(x, V^t V y) = (x, y)$ при любых $x, y \in E$. Отсюда следует, что $V^t V = I$.

2) $\Rightarrow$ 1). Дано: $V^t V = I$. Тогда

$$(Vx, Vy) = (x, V^t V y) = (x, y)$$

при любых $x, y \in E$. Это означает, что V — изометрический оператор.

Свойства 2), 3) и 4) равносильны друг другу в силу теоремы об обратном операторе (см. [3], теорема 6.19 из главы 1). □

Предложение 2.18. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E. Пусть $V \in \Lambda(E)$ и $v \in M^n$ — его изображающая матрица в базисе $\mathbf{e}$. Оператор V является изометрическим тогда и только тогда, когда матрица v ортогональна.*

Доказательство. Изображающей матрицей оператора V^t в базисе $\mathbf{e}$ является матрица v^t. Тогда изображающая матрица оператора $V^t V$ в базисе $\mathbf{e}$ есть $v^t v$.

В силу предложения 2.17 изометричность оператора V равносильна равенству $V^t V = I$. В свою очередь это равенство равносильно тому, что изображающая матрица $v^t v$ равна единичной матрице, то есть матрица v ортогональна. $\square$

Предложение 2.19. *Множество всех изометрических операторов в вещественном евклидовом пространстве E образует группу (относительно умножения).*

Доказательство. Проверим, что произведение изометрических операторов V_1, V_2 снова является изометрическим оператором. Имеем:

$$\|V_1 V_2 x\| = \|V_2 x\| = \|x\| \quad \forall x \in E.$$

Таким образом, оператор $V_1 V_2$ сохраняет норму, следовательно, он изометричен.

Очевидно, тождественный оператор I изометричен.

Наконец, проверим, что для изометрического оператора V обратный оператор V^{-1} также изометричен. Изометричность V равносильна равенству $V^t V = I$. Тогда $(V^t V)^{-1} = I$. Имеем: $(V^t V)^{-1} = V^{-1}(V^t)^{-1} = V^{-1}(V^{-1})^t$. Следовательно, $V^{-1}(V^{-1})^t = I$. Это означает, что V^{-1} — изометрический оператор.

Из проверенных свойств вытекает, что множество изометрических операторов в E образует группу. $\square$

Предложение 2.20. *Определитель изометрического оператора V по абсолютной величине равен единице, то есть* $\det V = 1$ *либо* $\det V = -1$.

Доказательство. В ортонормированном базисе $\mathbf{e}$ изображающая матрица v оператора V ортогональна. Достаточно вспомнить, что определитель ортогональной матрицы по абсолютной величине равен единице. Следовательно,

$$|\det V| = |\det v| = 1. \qquad \square$$

Замечание. 1) Множество изометрических операторов с определителем $\det V = 1$ образует подгруппу группы всех изометрических операторов в E.

2) Группа всех изометрических операторов в n-мерном вещественном евклидовом пространстве E изоморфна группе $O(n)$ ортогональных матриц порядка n. Группа изометрических операторов с $\det V = 1$ в пространстве E изоморфна группе $SO(n)$ собственно ортогональных матриц порядка n.

2.5. **Преобразование ортонормированных базисов.** Пусть E — вещественное евклидово пространство. Считаем, что $\dim E = n \geqslant 1$. Пусть

$$\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\} \ \text{ и } \ \widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n\}$$

есть два ортонормированных базиса в E. Напомним, что оператор перехода B от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$ определяется по правилу $Be_k = \widetilde{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Его изображающая матрица в базисе $\mathbf{e}$ — это матрица перехода b от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Имеем:

$$\text{если } \ x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, \ \text{ то } \ Bx = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \widetilde{e}_k.$$

Поскольку оба базиса ортонормированы, в силу предложения 1.7 выполнены равенства

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\xi^k)^2, \quad \|Bx\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\xi^k)^2.$$

Следовательно,

$$\|Bx\| = \|x\| \quad \forall x \in E.$$

Таким образом, *если оба базиса ортонормированы, то оператор перехода B — изометрический, а матрица перехода b ортогональна.*

Вспомним ковариантный закон преобразования базисов и контравариантный закон преобразования координат:

$$\vec{\widetilde{\mathbf{e}}} = b^t \vec{\mathbf{e}}, \quad \vec{\widetilde{x}} = b^{-1} \vec{x}.$$

Поскольку матрица b ортогональна, то $b^{-1} = b^t$. Следовательно, *ковариантный и контравариантный законы преобразования совпадают, если оба базиса ортонормированы.*

Далее, вспомним закон преобразования изображающих матриц линейных операторов в E: если оператор A имеет изображающую матрицу a в базисе $\mathbf{e}$ и изображающую матрицу $\widetilde{a}$ в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$, то $\widetilde{a} = b^{-1}ab$.

Вспомним закон преобразования изображающих матриц билинейных форм: если форма $Q \in \mathcal{F}(E)$ имеет изображающую матрицу q в базисе $\mathbf{e}$ и изображающую матрицу $\widetilde{q}$ в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$, то $\widetilde{q} = b^t qb$.

Поскольку $b^{-1} = b^t$, то *законы преобразования изображающих матриц линейных операторов и билинейных форм совпадают, если оба базиса ортонормированы.*

2.6. **Ортопроекторы.** Пусть E — вещественное евклидово пространство, F — подпространство пространства E, $F^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Пусть $n = \dim E$, $m = \dim F$. Тогда $E = F \oplus F^{\perp}$, и любой элемент $x \in E$ однозначно представим в виде $x = f + g$, где $f \in F$ и $g \in F^{\perp}$.

Рассмотрим оператор P, сопоставляющий вектору x его ортогональную проекцию f на подпространство F: $Px = f$. Очевидно, P — линейный оператор. Действительно, если

$$x_1 = f_1 + g_1, \quad x_2 = f_2 + g_2, \quad f_1, f_2 \in F, \ \ g_1, g_2 \in F^{\perp},$$

и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha f_1 + \beta f_2) + (\alpha g_1 + \beta g_2),$$

причем $\alpha f_1 + \beta f_2 \in F$ и $\alpha g_1 + \beta g_2 \in F^{\perp}$. Следовательно,

$$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f_1 + \beta f_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2.$$

Определение 2.21. *Оператор $P \in \Lambda(E)$, сопоставляющий вектору $x \in E$ его ортогональную проекцию f на подпространство F, называется ортогональным проектором, или просто ортопроектором, на подпространство F.*

Замечание. Если P — ортопроектор на подпространство F, то $P^{\perp} = I - P$ — ортопроектор на подпространство $F^{\perp}$.

Явное описание ортопроектора P на подпространство F можно дать, если выбрать какой-либо ортонормированный базис $\{f_1, \ldots, f_m\}$ в подпространстве F. Тогда в силу (1.6) Px задается формулой

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, f_j) f_j.$$

Глава 5. Комплексные евклидовы пространства

§ 1. Полуторалинейные формы в комплексном линейном пространстве

При изучении комплексных евклидовых пространств нам понадобится понятие полуторалинейной формы. Поэтому мы начнем с рассмотрения полуторалинейных форм в конечномерном комплексном пространстве.

1.1. **Полуторалинейные формы.** Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim E = n$.

Определение 1.1. *Отображение $Q : E \times E \to \mathbb{C}$ называется полуторалинейной формой в пространстве E, если*

$$Q(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha\, Q(x_1, y) + \beta\, Q(x_2, y)$$
$$\forall x_1, x_2, y \in E,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$
$$Q(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{\lambda}\, Q(x, y_1) + \overline{\mu}\, Q(x, y_2)$$
$$\forall x, y_1, y_2 \in E,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Множество всех полуторалинейных форм в пространстве E обозначим через $\widetilde{\mathcal{F}}(E)$. На этом множестве введем линейные операции — сложение и умножение на комплексные числа. Суммой форм $Q_1, Q_2 \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ называется отображение $Q_1 + Q_2 : E \times E \to \mathbb{C}$, определенное по правилу

$$(Q_1 + Q_2)(x, y) := Q_1(x, y) + Q_2(x, y), \quad x, y \in E.$$

Произведением формы $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ на число $\alpha \in \mathbb{C}$ называется отображение $\alpha Q : E \times E \to \mathbb{C}$, определенное по правилу

$$(\alpha Q)(x, y) := \alpha Q(x, y), \quad x, y \in E.$$

Проверьте, что отображения $Q_1 + Q_2$ и αQ снова являются полуторалинейными формами.

Теорема 1.2. *Множество $\widetilde{\mathcal{F}}(E)$ с введенными линейными операциями образует линейное пространство над полем $\mathbb{C}$.*

Доказательство проведите самостоятельно.

Предложение 1.3. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пусть $\widetilde{\mathcal{F}}(E)$ — пространство полуторалинейных форм в E. Тогда* $\dim \widetilde{\mathcal{F}}(E) = n^2$.

Доказательство. Доказательство аналогично случаю билинейных форм.

Фиксируем базис $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ в пространстве E. Рассмотрим полуторалинейные формы Q^{kl}, $k, l = 1, \dots, n$, определенные по правилу

$$Q^{kl}(x, y) = \xi^k \overline{\eta^l}, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, \quad y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l.$$

Покажем, что набор $\{Q^{kl}\}$ из n^2 форм образует базис в пространстве $\widetilde{\mathcal{F}}(E)$. Отсюда будет следовать $\dim \widetilde{\mathcal{F}}(E) = n^2$.

Сначала проверим, что этот набор линейно независим. Предположим, что $\sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} Q^{kl} = \mathbf{0}_{\widetilde{\mathcal{F}}(E)}$. Это означает, что

$$\sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} Q^{kl}(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in E.$$

Подставим $x = e_m$, $y = e_j$ и учтем, что $Q^{kl}(e_m, e_j) = \delta_m^k \delta_j^l$:

$$\sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} \delta_m^k \delta_j^l = \gamma_{mj} = 0.$$

Это верно при всех $m, j = 1, \dots, n$, а потому набор $\{Q^{kl}\}$ линейно независим.

Теперь проверим, что любую форму $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ можно разложить по набору $\{Q^{kl}\}$. Пусть $x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k$ и $y = \sum_{l=1}^n \eta^l e_l$. Имеем:

$$Q(x,y) = Q\Big(\sum_{k=1}^n \xi^k e_k, \sum_{l=1}^n \eta^l e_l\Big) = \sum_{k,l=1}^n \xi^k \overline{\eta^l} Q(e_k, e_l) =$$
$$= \sum_{k,l=1}^n q_{kl} \xi^k \overline{\eta^l} = \sum_{k,l=1}^n q_{kl} Q^{kl}(x,y) = \Big(\sum_{k,l=1}^n q_{kl} Q^{kl}\Big)(x,y),$$

где введено обозначение $q_{kl} := Q(e_k, e_l)$. Следовательно,

$$Q = \sum_{k,l=1}^n q_{kl} Q^{kl}, \quad q_{kl} = Q(e_k, e_l). \qquad \square$$

1.2. **Изображающая матрица полуторалинейной формы.** Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в пространстве E. Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$. Обозначим

$$q_{kl} := Q(e_k, e_l), \quad k, l = 1, \dots, n. \tag{1.1}$$

Тогда

$$Q(x,y) = \sum_{k,l=1}^n q_{kl} \xi^k \overline{\eta^l}, \quad \text{где } x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k, \ y = \sum_{l=1}^n \eta^l e_l. \tag{1.2}$$

Определение 1.4. *Изображающей матрицей полуторалинейной формы $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ в базисе $\mathbf{e}$ называется матрица*

$$q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

где элементы q_{kl} определены в (1.1).

Обратите внимание на *особенность матрицы* q: первый номер элемента q_{kl} — это номер столбца, а второй — номер строки. (Так же было и для изображающей матрицы билинейной формы.)

Найдем закон преобразования изображающей матрицы полуторалинейной формы.

Пусть $\mathbf{e}$ и $\widetilde{\mathbf{e}}$ — два базиса в пространстве E и пусть b — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Напомним, что элементы β_k^j матрицы b определяются из разложений

$$\widetilde{e}_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j e_j, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$, и пусть q — изображающая матрица формы Q в базисе $\mathbf{e}$, а $\widetilde{q}$ — изображающая матрица формы Q в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$. Тогда

$$\widetilde{q}_{kl} = Q(\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_l) = Q\Big(\sum_{j=1}^{n} \beta_k^j e_j, \sum_{m=1}^{n} \beta_l^m e_m\Big) =$$
$$= \sum_{j,m=1}^{n} \beta_k^j \overline{\beta_l^m} Q(e_j, e_m) = \sum_{j,m=1}^{n} \overline{\beta_l^m} q_{jm} \beta_k^j = [b^* q b]_{kl}$$

при $k, l = 1, \ldots, n$. Следовательно,

$$\widetilde{q} = b^* q b. \tag{1.3}$$

Зададим *отношение эквивалентности* на классе матриц M^n (с комплексными элементами): будем говорить, что матрица $\widetilde{q}$ эквивалентна матрице q, если найдется неособая матрица $b \in M^n$ такая, что выполнено (1.3). Проверьте, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности. Тогда изображающие матрицы одной и той же формы $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ в различных базисах эквивалентны друг другу.

1.3. Квадратичная форма, отвечающая полуторалинейной форме.

Определение 1.5. *Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$. Квадратичной формой, отвечающей полуторалинейной форме Q, называется отображение $E \to \mathbb{C}$, сопоставляющее вектору $x \in E$ число $Q(x, x)$.*

Вспомним, что для билинейных форм, зная квадратичную форму, можно восстановить лишь симметричную часть билинейной формы. Иначе обстоит дело для полуторалинейных форм.

Предложение 1.6. *В n-мерном линейном пространстве E над полем $\mathbb{C}$ любая полуторалинейная форма однозначно восстанавливается по своей квадратичной форме.*

Доказательство. Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$. Пусть $x, y \in E$. Рассмотрим значения квадратичной формы на векторах $x + y$ и $x + iy$:

$$Q(x+y, x+y) = Q(x,x) + Q(x,y) + Q(y,x) + Q(y,y),$$
$$Q(x+iy, x+iy) = Q(x,x) - iQ(x,y) + iQ(y,x) + Q(y,y).$$

Домножим второе равенство на i и сложим с первым:

$$Q(x+y, x+y) + iQ(x+iy, x+iy) =$$
$$= (1+i)Q(x,x) + 2Q(x,y) + (1+i)Q(y,y).$$

Следовательно,

$$Q(x,y) = \frac{1}{2}\Big(Q(x+y, x+y) + iQ(x+iy, x+iy) -$$
$$- (1+i)Q(x,x) - (1+i)Q(y,y)\Big).$$

Это и есть выражение полуторалинейной формы $Q(x, y)$ через значения квадратичных форм $Q(x, x)$, $Q(y, y)$, $Q(x+y, x+y)$ и $Q(x+iy, x+iy)$. $\square$

1.4. Сопряженная полуторалинейная форма. Эрмитовы формы.

Определение 1.7. *Пусть* $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$. *Сопряженной формой к форме* Q *называется полуторалинейная форма* Q^*, *определенная по правилу* $Q^*(x,y) = \overline{Q(y,x)}$, $x, y \in E$.

Упражнение. Докажите следующее свойство: если $q \in M^n$ — изображающая матрица полуторалинейной формы Q в базисе $\mathbf{e}$, то изображающей матрицей формы Q^* в том же базисе служит матрица q^*.

Определение 1.8. *Полуторалинейная форма* $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ *называется эрмитовой, если*

$$Q(x,y) = \overline{Q(y,x)} \quad \forall x, y \in E. \tag{1.4}$$

Отметим, что для эрмитовой формы выполнено $Q(x,x) = \overline{Q(x,x)}$ при любом $x \in E$. (Это следует из (1.4) при $y = x$.) Тем самым для эрмитовой формы отвечающая ей квадратичная форма $Q(x,x)$ принимает вещественные значения.

Проверьте самостоятельно следующее утверждение.

Предложение 1.9. *Полуторалинейная форма* $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ *является эрмитовой тогда и только тогда, когда ее изображающая матрица* q *в каком-либо базисе эрмитова.*

§ 2. Геометрия комплексного евклидова пространства

2.1. **Основные понятия.**

Определение 2.1. *Множество E называется комплексным евклидовым пространством, если*

1) *E — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ $(\dim E = n)$;*

2) *в пространстве E выделена эрмитова полуторалинейная форма Q такая, что $Q(x, x) > 0$ при $x \neq \mathbf{0}$, называемая скалярным произведением векторов*:

$$(x, y) := Q(x, y), \quad x, y \in E.$$

Свойства скалярного произведения

- Полуторалинейность:

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y), \ x_1, x_2, y \in E, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$
$$(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{\lambda}(x, y_1) + \overline{\mu}(x, y_2), \ x, y_1, y_2 \in E, \ \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

- Эрмитовость:

$$(x, y) = \overline{(y, x)}, \quad x, y \in E.$$

- Положительная определенность:

$$(x, x) > 0 \quad \forall x \neq \mathbf{0}.$$

На протяжении этого параграфа *предполагаем, что E — комплексное евклидово пространство.*

Определение 2.2. *Говорят, что элементы $x, y \in E$ ортогональны и пишут $x \perp y$, если $(x, y) = 0$.*

Определение 2.3. *Нормой элемента $x \in E$ называется число $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$.*

Имеется ввиду арифметическое значение корня, так что $\|x\| \geqslant 0$.

Следующие простые свойства имеют аналоги в вещественном евклидовом пространстве. Проверьте свойства самостоятельно.

- Нулевой вектор ортогонален к любому вектору x:
$$(\mathbf{0}, x) = 0 \quad \forall x \in E. \tag{2.1}$$
- Справедливо тождество
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2, \quad x, y \in E. \tag{2.2}$$
В частности,
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \quad \text{если } x \perp y.$$
- Если $x \perp y$ при любом $y \in E$, то $x = \mathbf{0}$.

Определение 2.4. *Базис* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *в комплексном евклидовом пространстве* E *называется ортогональным, если элементы базиса попарно ортогональны, то есть* $(e_j, e_k) = 0$ *при* $j \neq k$.

Определение 2.5. *Базис* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *в комплексном евклидовом пространстве* E *называется ортонормированным, если*
$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

В следующем пункте мы обсудим процесс ортогонализации, который показывает, что в комплексном евклидовом пространстве E размерности $n = \dim E \geqslant 1$ существует ортонормированный базис: по произвольному базису можно построить ортонормированный базис с помощью этого процесса.

Предложение 2.6. *Пусть* E *— комплексное евклидово пространство,* $\dim E = n \geqslant 1$.

1) *Если* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— ортонормированный базис в* E *и* $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$, *то*
$$\xi^j = (x, e_j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

2) *Если* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— ортонормированный базис в* E *и* $x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k$, $y = \sum_{l=1}^n \eta^l e_l$, *то*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi^k \overline{\eta^k}, \quad \|x\|^2 = (x, x) = \sum_{k=1}^n |\xi^k|^2.$$

Доказательство. 1) Используя линейность скалярного произведения по первому аргументу, имеем:

$$(x, e_j) = \Bigl(\sum_{k=1}^n \xi^k e_k, e_j\Bigr) = \sum_{k=1}^n \xi^k (e_k, e_j) = \sum_{k=1}^n \xi^k \delta_{kj} = \xi^j.$$

2) Используя полулинейность скалярного произведения по второму аргументу и уже доказанное свойство 1, получаем:

$$(x, y) = \Bigl(x, \sum_{j=1}^n \eta^j e_j\Bigr) = \sum_{j=1}^n \overline{\eta^j}(x, e_j) = \sum_{j=1}^n \xi^j \overline{\eta^j}. \qquad \square$$

2.2. **Процесс ортогонализации.** *Процесс ортогонализации* в комплексном евклидовом пространстве, который позволяет по заданному базису построить новый ортонормированный базис, описывается так же, как в вещественном евклидовом пространстве.

Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — некоторый базис в E. Полагаем $e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1$. Если $n = 1$, новый базис построен. Если $n > 1$, то рассмотрим вектор $\widetilde{e}_2 := f_2 - (f_2, e_1)e_1$, а затем нормируем его: $e_2 = \frac{1}{\|\widetilde{e}_2\|}\widetilde{e}_2$. Автоматически $e_2 \perp e_1$. Если $n = 2$, то ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$ построен. Если $n > 2$, продолжаем процесс.

Всего требуется сделать n шагов. В результате будет построен ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, такой что

$$\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k) = \mathcal{L}(f_1, \ldots, f_k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

2.3. Неравенство Коши. Свойства нормы. Примеры.

Предложение 2.7. *В комплексном евклидовом пространстве E скалярное произведение векторов по модулю не превосходит произведения норм этих векторов*:

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad x, y \in E. \tag{2.3}$$

Неравенство (2.3) называют *неравенством Коши.*

Доказательство. Если $x = \mathbf{0}$ или $y = \mathbf{0}$, то неравенство очевидно (обе части неравенства равны нулю).

Предположим, что $x \neq \mathbf{0}$ и $y \neq \mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис в E. Разложим векторы x и y по данному базису: $x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k$, $y = \sum_{l=1}^n \eta^l e_l$. В силу предложения 2.6 имеем $(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi^k \overline{\eta^k}$. Следовательно,

$$2|(x, y)| = 2\Big|\sum_{k=1}^n \xi^k \overline{\eta^k}\Big| \leqslant 2\sum_{k=1}^n \sqrt{\alpha}|\xi^k| \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}|\eta^k| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \sum_{k=1}^n |\xi^k|^2 + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^n |\eta^k|^2 = \alpha\|x\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|y\|^2.$$

Здесь $\alpha > 0$ — любое число. Удобно выбрать $\alpha = \frac{\|y\|}{\|x\|}$. При таком выборе получаем $2|(x, y)| \leqslant 2\|x\|\|y\|$. □

Свойства нормы

- Однородность:

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad x \in E, \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

- Неравенство треугольника:

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in E.$$

- Положительная определенность:

$$\|x\| \geqslant 0 \ \ \forall x \in E; \quad \|x\| > 0, \ x \neq \mathbf{0}; \quad \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \mathbf{0}.$$

Проверьте перечисленные свойства самостоятельно по аналогии со случаем вещественного евклидова пространства.

Примеры комплексных евклидовых пространств

- $E = \mathbb{C}^n$ — комплексное евклидово пространство со скалярным произведением
$$(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{j=1}^{n} \xi^j \overline{\eta^j}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$
Пример ортонормированного базиса в $\mathbb{C}^n$ — стандартный базис
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$
- $E = M^n$ — пространство матриц с комплексными элементами. Скалярное произведение вводится по формуле
$$(a, b) = \operatorname{Tr} ab^*, \quad a, b \in M^n.$$
Проверьте равенство
$$(a, b) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \overline{b_{ij}}. \tag{2.4}$$
По аналогии с вещественным случаем проверьте, что введенное скалярное произведение обладает всеми нужными свойствами (полуторалинейность, эрмитовость, положительная определенность).

  Проверьте, что “матричные единицы” образуют ортонормированный базис в M^n.
- E — пространство многочленов степени не выше $n - 1$ с комплексными коэффициентами. Введем скалярное произведение по формуле
$$(P_1, P_2) = \int_{-1}^{1} P_1(t) \overline{P_2(t)}\, dt.$$

Убедитесь, что все свойства скалярного произведения выполнены.

2.4. **Ортогональная сумма. Ортогональное дополнение.**

Определение 2.8. *Подпространства F и G в комплексном евклидовом пространстве E называются ортогональными (пишем $F \perp G$), если $(f, g) = 0$ при любых $f \in F$ и $g \in G$.*

Как и в вещественном случае, пересечение ортогональных подпространств F и G в комплексном евклидовом пространстве E тривиально: $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$, а потому линейная сумма $F + G$ является прямой суммой.

Определение 2.9. *Прямая сумма $F \dotplus G$ ортогональных подпространств F и G называется ортогональной суммой и обозначается $F \oplus G$.*

Определение 2.10. *Пусть F — подпространство в комплексном евклидовом пространстве E. Ортогональным дополнением подпространства F называется множество*

$$F^{\perp} := \{g \in E : (g, f) = 0 \quad \forall f \in F\}.$$

Предложение 2.11. *Пусть F — подпространство в комплексном евклидовом пространстве E и $F^{\perp}$ — ортогональное дополнение подпространства F. Тогда справедливы следующие свойства:*

1) $F^{\perp}$ *— подпространство в* E;
2) F *и* $F^{\perp}$ *— ортогональные подпространства*;
3) $F \oplus F^{\perp} = E$;
4) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Докажите это предложение самостоятельно по аналогии с вещественным случаем.

Определение 2.12. *Пусть F — подпространство в комплексном евклидовом пространстве E и $F^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Для элемента $x \in E$ в представлении*

$x = f + g$, где $f \in F$, $g \in F^{\perp}$, элемент f называется ортогональной проекцией x на F, а g называется ортогональной составляющей.

2.5. **Изоморфизм комплексных евклидовых пространств.**

Определение 2.13. *Пусть E_1 и E_2 — два комплексных евклидовых пространства. Говорят, что E_2 изоморфно E_1, если существует линейное взаимно-однозначное отображение $J : E_1 \to E_2$, такое что*

$$(Jx, Jy)_{E_2} = (x, y)_{E_1} \quad \forall x, y \in E_1.$$

Проверьте самостоятельно, что изоморфизм — это отношение эквивалентности на классе всех комплексных евклидовых пространств.

Очевидно, если E_2 изоморфно E_1 в смысле данного определения, то автоматически E_1 и E_2 будут изоморфными линейными пространствами.

Теорема 2.14. *Любое комплексное евклидово пространство размерности n изоморфно $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство. Зафиксируем ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в E. Рассмотрим отображение $J : E \to \mathbb{C}^n$, определенное по правилу:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k \ \mapsto \ Jx = \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Мы знаем, что это отображение линейное и взаимно-однозначное. Проверим, что J сохраняет скалярное произведение.

Пусть $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$ и $y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l$. В силу предложения 2.6 в ортонормированном базисе скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(x, y)_E = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \overline{\eta^k}.$$

Имеем:

$$Jx = \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad Jy = \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$

По определению скалярного произведения векторов в $\mathbb{C}^n$ выполнено

$$(Jx, Jy)_{\mathbb{C}^n} = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \overline{\eta^k}.$$

Следовательно,

$$(x, y)_E = (Jx, Jy)_{\mathbb{C}^n}, \quad x, y \in E. \qquad \square$$

§ 3. Линейные операторы в комплексном евклидовом пространстве

3.1. **Линейные операторы и полуторалинейные формы.** Мы установим взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и полуторалинейными формами в комплексном евклидовом пространстве E.

Определение 3.1. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $A \in \Lambda(E)$. Полуторалинейной формой оператора A называется форма $Q_A \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$, определенная по правилу*

$$Q_A(x, y) := (Ax, y), \quad x, y \in E. \tag{3.1}$$

Предложение 3.2. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Отображение $J : \Lambda(E) \to \widetilde{\mathcal{F}}(E)$, определенное по правилу $JA = Q_A$, где Q_A определено в (3.1), является изоморфизмом линейных пространств $\Lambda(E)$ и $\widetilde{\mathcal{F}}(E)$.*

Докажите это предложение самостоятельно по аналогии с вещественным случаем.

Следствие 3.3. *В комплексном евклидовом пространстве* E *для любой полуторалинейной формы* $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ *существует единственный оператор* $A \in \Lambda(E)$*, такой что* $Q = Q_A$*, то есть* $Q(x, y) = (Ax, y)$ *при любых* $x, y \in E$*.*

Предложение 3.4. *Пусть* E *— комплексное евклидово пространство и* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— ортонормированный базис в* E*. Пусть* $A \in \Lambda(E)$ *и* $a \in M^n$ *— изображающая матрица оператора* A *в базисе* $\mathbf{e}$*. Пусть* $Q_A \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ *— полуторалинейная форма оператора* A*, а* $q \in M^n$ *— изображающая матрица формы* Q_A *в базисе* $\mathbf{e}$*. Тогда* $a = q$*.*

Докажите это предложение самостоятельно по аналогии с вещественным случаем.

Замечание. 1) Если базис $\mathbf{e}$ не ортонормированный, то утверждение неверно, то есть $a \neq q$ в общем случае.
2) Предложение 3.4 дает конструктивный способ построить оператор A по заданной форме Q. Надо найти изображающую матрицу q формы Q в каком-либо ортонормированном базисе и построить оператор A, имеющий ту же изображающую матрицу $a = q$ в этом базисе.

Вспомним, что в вещественном евклидовом пространстве, зная квадратичную форму $Q_A(x, x)$, $x \in E$, можно восстановить лишь симметричную часть оператора. Иначе обстоит дело в комплексном евклидовом пространстве.

Предложение 3.5. *В комплексном евклидовом пространстве* E *любой оператор* $A \in \Lambda(E)$ *однозначно восстанавливается по квадратичной форме.*

Доказательство. Пусть $A \in \Lambda(E)$ и пусть $Q_A \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ — отвечающая ему полуторалинейная форма: $Q_A(x, y) = (Ax, y)$, $x, y \in E$.

Предположим, что мы знаем значения квадратичной формы $Q_A(x,x) = (Ax,x)$ при всех $x \in E$. По квадратичной форме однозначно восстанавливается полуторалинейная форма (см. предложение 1.6). А по полуторалинейной форме однозначно восстанавливается оператор (см. следствие 3.3). $\square$

Следствие 3.6. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть для операторов $A, B \in \Lambda(E)$ совпадают квадратичные формы: $(Ax,x) = (Bx,x)$, $x \in E$. Тогда $B = A$.*

3.2. **Сопряженный оператор.**

Определение 3.7. *Пусть $A \in \Lambda(E)$. Оператор $B \in \Lambda(E)$ называется сопряженным к оператору A, если $(Ax,y) = (x,By)$ при любых $x,y \in E$.*

Предложение 3.8. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Для любого оператора $A \in \Lambda(E)$ существует единственный сопряженный оператор B.*

Доказательство. Докажем существование сопряженного оператора. Оператору A отвечает полуторалинейная форма Q_A. Рассмотрим сопряженную форму Q_A^*. Ей отвечает оператор B. Проверим, что B является сопряженным к оператору A. Имеем:

$$(Ax,y) = Q_A(x,y) = \overline{Q_A^*(y,x)} = \overline{(By,x)} = (x,By),\ x,y \in E.$$

Единственность сопряженного оператора проверяется по аналогии с вещественным случаем. $\square$

Для сопряженного оператора к оператору A используем обозначение $B = A^*$.

Свойства сопряженного оператора

- Полулинейность операции сопряжения:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = \overline{\alpha} A_1^* + \overline{\beta} A_2^*, \quad A_1, A_2 \in \Lambda(E),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

- Выполнено равенство
$$(A^*)^* = A.$$
- Правило сопряжения композиции операторов:
$$(AC)^* = C^*A^*, \quad A, C \in \Lambda(E).$$
- Выполнено равенство
$$I^* = I.$$
- Если $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E, $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$, то изображающей матрицей оператора A^* в базисе $\mathbf{e}$ служит a^*.
- У операторов A и A^* следы и определители взаимно сопряжены:
$$\operatorname{Tr} A^* = \overline{\operatorname{Tr} A}, \quad \det A^* = \overline{\det A}.$$
- Характеристические многочлены операторов A и A^* удовлетворяют соотношению
$$d_{A^*}(\lambda) = \overline{d_A(\overline{\lambda})}.$$
- Спектры операторов A и A^* взаимно сопряжены: если μ_j — собственное значение оператора A алгебраической кратности σ_j, то $\overline{\mu_j}$ является собственным значением оператора A^* той же кратности σ_j.

Доказательство. Проверим два последних свойства. Остальные свойства проверьте самостоятельно по аналогии с вещественным случаем.

Имеем:
$$d_{A^*}(\lambda) = \det(A^* - \lambda I) = \det(A - \overline{\lambda} I)^* = \overline{\det(A - \overline{\lambda} I)} = \overline{d_A(\overline{\lambda})}.$$

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_p$ — все различные собственные значения оператора A, $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ — их алгебраические кратности. Тогда
$$d_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \mu_1)^{\sigma_1} \ldots (\lambda - \mu_p)^{\sigma_p}.$$

Следовательно,

$$d_{A^*}(\lambda) = \overline{d_A(\overline{\lambda})} = (-1)^n \overline{(\overline{\lambda} - \mu_1)^{\sigma_1} \ldots (\overline{\lambda} - \mu_p)^{\sigma_p}}$$
$$= (-1)^n (\lambda - \overline{\mu_1})^{\sigma_1} \ldots (\lambda - \overline{\mu_p})^{\sigma_p}.$$

Следовательно, различные собственные значения оператора A^* — это числа $\overline{\mu_1}, \ldots, \overline{\mu_p}$, а их кратности равны $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$. □

3.3. **Образ оператора A и ядро сопряженного оператора A^*.**

Теорема 3.9. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Для любого $A \in \Lambda(E)$ образ оператора A и ядро сопряженного оператора A^* являются ортогональными подпространствами и их ортогональная сумма равна всему пространству E:*

$$\operatorname{Ran} A \oplus \operatorname{Ker} A^* = E. \tag{3.2}$$

Доказательство. Имеем следующую цепочку равносильных соотношений:

$$g \in \operatorname{Ker} A^* \;\Leftrightarrow\; A^* g = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; (A^* g, x) = 0 \;\; \forall x \in E$$
$$\Leftrightarrow\; (g, Ax) = 0 \;\; \forall x \in E \;\Leftrightarrow\; g \perp \operatorname{Ran} A \;\Leftrightarrow\; g \in (\operatorname{Ran} A)^{\perp}.$$

Следовательно, $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Ran} A)^{\perp}$, то есть выполнено (3.2). □

Замечание. 1) Уравнение $Ax = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда $f \in \operatorname{Ran} A$, то есть, $f \perp \operatorname{Ker} A^*$. Иначе говоря, условие разрешимости состоит в ортогональности правой части f ко всем решениям z однородного сопряженного уравнения $A^* z = \mathbf{0}$.

2) Применяя этот результат в случае $E = \mathbb{C}^n$ и оператора $A = \widehat{a}$ умножения на матрицу $a \in M^n$, получаем условие разрешимости неоднородной системы линейных алгебраических уравнений $a\vec{x} = \vec{f}$:

$$\vec{f} \perp \vec{z} \;\text{ для любого решения }\; \vec{z} \;\text{ системы }\; a^* \vec{z} = \vec{0}.$$

3.4. **Ортопроекторы.** Пусть E — комплексное евклидово пространство, F — подпространство пространства E, $F^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Пусть $n = \dim E$, $m = \dim F$. Тогда $E = F \oplus F^{\perp}$ и любой элемент $x \in E$ однозначно представим в виде $x = f + g$, где $f \in F$ и $g \in F^{\perp}$.

Рассмотрим оператор P, сопоставляющий вектору x его ортогональную проекцию f на подпространство F: $Px = f$. Точно так же, как в вещественном случае, проверяется, что P — линейный оператор.

Определение 3.10. *Оператор $P \in \Lambda(E)$, сопостав-ляющий вектору $x \in E$ его ортогональную проекцию f на подпространство F, называется ортогональным проектором или просто ортопроектором на подпространство F.*

Замечание. Если P — ортопроектор на подпространство F, то $P^{\perp} = I - P$ — ортопроектор на подпространство $F^{\perp}$.

Явное описание ортопроектора P на подпространство F можно дать, если выбрать какой-либо ортонормированный базис $\{f_1, \dots, f_m\}$ в подпространстве F. Тогда по аналогии с вещественным случаем получаем

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, f_j) f_j.$$

§ 4. Самосопряженные и унитарные операторы

4.1. **Самосопряженные операторы.** Пусть E — комплексное евклидово пространство.

Определение 4.1. *Оператор $A \in \Lambda(E)$ называется самосопряженным, если $A^* = A$.*

Замечание. Антисамосопряженным оператором называется оператор $B \in \Lambda(E)$ такой, что $B^* = -B$. Однако, этим понятием пользуются редко, поскольку всегда можно представить антисамосопряженный оператор в виде $B = iA$, где $A^* = A$.

Предложение 4.2. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Любой оператор $C \in \Lambda(E)$ однозначно представляется в виде $C = A + iB$, где $A^* = A$ и $B^* = B$.*

Доказательство. Для доказательства существования положим

$$A = \frac{1}{2}(C + C^*), \quad B = \frac{1}{2i}(C - C^*). \tag{4.1}$$

Очевидно, выполнены равенства $A^* = A$, $B^* = B$ и $C = A + iB$.

Теперь проверим единственность. Пусть $C = A + iB$, где $A^* = A$ и $B^* = B$. Тогда $C^* = A^* - iB^* = A - iB$. Таким образом, выполнены равенства

$$C = A + iB, \quad C^* = A - iB.$$

Складывая эти равенства, получаем $2A = C + C^*$, а вычитая второе равенство из первого, имеем $2iB = C - C^*$. В итоге мы пришли к прежним выражениям (4.1). Это рассуждение доказывает единственность представления. $\square$

Определение 4.3. *Оператор $A = \frac{1}{2}(C + C^*)$ называется вещественной частью оператора C и обозначается $A = \operatorname{Re} C$, оператор $B = \frac{1}{2i}(C - C^*)$ называется мнимой частью оператора C и обозначается $B = \operatorname{Im} C$.*

Предложение 4.4. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Оператор $A \in \Lambda(E)$ самосопряжен тогда и только тогда, когда его квадратичная форма вещественна*:

$$(Ax, x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E. \tag{4.2}$$

Доказательство. Необходимость. Дано: $A^* = A$. Тогда

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} \ \Rightarrow \ (Ax, x) \in \mathbb{R}, \ x \in E.$$

Достаточность. Дано: выполнено (4.2). Тогда

$$(Ax, x) = \overline{(Ax, x)} = \overline{(x, A^*x)} = (A^*x, x) \quad \forall x \in E.$$

Таким образом, квадратичные формы для операторов A и A^* совпадают. В силу следствия 3.6 получаем $A^* = A$. $\square$

Предложение 4.5. *Для любого оператора $C \in \Lambda(E)$ операторы C^*C и CC^* самосопряжены.*

Доказательство. В силу правила сопряжения композиции операторов имеем: $(C^*C)^* = C^*(C^*)^* = C^*C$. Тем самым, оператор C^*C самосопряжен. Аналогично проверяется самосопряженность оператора CC^*. $\square$

Предложение 4.6. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E. Оператор $A \in \Lambda(E)$ самосопряжен тогда и только тогда, когда его изображающая матрица a в базисе $\mathbf{e}$ эрмитова.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E. Пусть $A \in \Lambda(E)$ и $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$. Тогда изображающей матрицей оператора A^* в базисе $\mathbf{e}$ является a^*. Очевидно, $A^* = A$ равносильно равенству $a^* = a$. $\square$

Предложение 4.7. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $A \in \Lambda(E)$ — самосопряженный оператор. Тогда все собственные значения оператора A вещественны.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение оператора A. Поскольку E — комплексное пространство, найдется собственный вектор $f \neq \mathbf{0}$. Имеем: $Af = \lambda f$. Умножим обе части равенства скалярно на f. Тогда $(Af, f) = \lambda(f, f)$. Следовательно,

$$\lambda = \frac{(Af, f)}{\|f\|^2}.$$

В силу предложения 4.4 для самосопряженного оператора выполнено $(Af, f) \in \mathbb{R}$. Учитывая, что $\|f\|^2 > 0$, получаем $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Предложение 4.8. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $A \in \Lambda(E)$ — самосопряженный оператор. Предположим, что λ и μ — различные собственные* *значения оператора A, а $f \neq \mathbf{0}$ и $g \neq \mathbf{0}$ — соответствующие собственные векторы*: $Af = \lambda f$, $Ag = \mu g$. *Тогда* $f \perp g$.

Доказательство. Умножим обе части равенства $Af = \lambda f$ скалярно на g:

$$(Af, g) = \lambda(f, g). \tag{4.3}$$

Умножим обе части равенства $Ag = \mu g$ скалярно на f:

$$(f, Ag) = (f, \mu g) = \mu(f, g). \tag{4.4}$$

Мы учли, что собственное значение μ вещественно. В силу самосопряженности оператора A имеем $(Af, g) = (f, Ag)$. Отсюда и из (4.3) и (4.4) вытекает, что

$$(\lambda - \mu)(f, g) = 0.$$

По условию $\lambda \neq \mu$, а потому $(f, g) = 0$. □

Пример. Пусть $E = \mathbb{C}^n$. Пусть задана эрмитова матрица $a \in M^n$. Тогда оператор $A = \widehat{a}$ умножения на матрицу a самосопряжен. Достаточно сослаться на то, что изображающей матрицей оператора A в стандартном базисе является сама матрица a, и применить предложение 4.6. Следовательно, *собственные значения эрмитовой матрицы вещественны* (в первом семестре этот факт сообщался без доказательства, см. [2], §9 в главе 1), а *собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны в* $\mathbb{C}^n$.

Предложение 4.9. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Пусть $A \in \Lambda(E)$ — симметричный оператор. Тогда собственные значения оператора A вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E и a — изображающая матрица оператора A в этом базисе. Поскольку $A^t = A$, то a — симметричная матрица с вещественными элементами. Тогда a — эрмитова матрица (любая вещественная симметричная матрица является эрмитовой). Мы знаем, что собственные значения эрмитовой матрицы вещественны, а собственные значения оператора A совпадают с собственными значениями изображающей матрицы a.

2) Пусть λ и μ — различные собственные значения оператора A, а $f \neq \mathbf{0}$ и $g \neq \mathbf{0}$ — соответствующие собственные векторы: $Af = \lambda f$, $Ag = \mu g$. Имеем:

$$(Af, g) = \lambda(f, g), \quad (f, Ag) = \mu(f, g).$$

В силу симметричности оператора A выполнено $(Af, g) = (f, Ag)$. Следовательно, $(\lambda - \mu)(f, g) = 0$. Поскольку $\lambda - \mu \neq 0$, получаем $(f, g) = 0$. □

4.2. **Унитарные операторы.**

Определение 4.10. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Оператор $U \in \Lambda(E)$ называется унитарным, если U сохраняет скалярное произведение, то есть*

$$(Ux, Uy) = (x, y), \quad \forall x, y \in E. \tag{4.5}$$

Предложение 4.11. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $U \in \Lambda(E)$. Следующие свойства равносильны:*

1) *U — унитарный оператор;*
2) *$U^*U = I$;*
3) *$UU^* = I$;*
4) *$U^{-1} = U^*$.*

Доказательство. Равенство (4.5) перепишем в виде

$$(U^*Ux, y) = (x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

Это равносильно равенству $U^*U = I$. Тем самым, свойства 1) и 2) равносильны.

Свойства 2), 3) и 4) равносильны друг другу в силу теоремы об обратном операторе. □

Предложение 4.12. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Оператор $U \in \Lambda(E)$ является унитарным тогда и только тогда, когда U сохраняет норму, то есть $\|Ux\| = \|x\|$ при всех $x \in E$.*

Доказательство. Необходимость очевидна: из (4.5) при $y = x$ следует, что $\|Ux\| = \|x\|$.

Докажем достаточность. Пусть U сохраняет норму. Тогда

$$(U^*Ux, x) = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = (x, x), \quad x \in E.$$

Отсюда следует, что $U^*U = I$ в силу следствия 3.6. Остается сослаться на предложение 4.11. $\square$

Следствие 4.13. *Унитарный оператор U является автоморфизмом пространства E.*

Докажите самостоятельно следующие три предложения по аналогии с вещественным случаем.

Предложение 4.14. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть* $\mathbf{e}$ *— ортонормированный базис в E. Пусть $U \in \Lambda(E)$ и $u \in M^n$ — его изображающая матрица в базисе* $\mathbf{e}$. *Оператор U является унитарным тогда и только тогда, когда матрица u унитарна.*

Предложение 4.15. *Множество всех унитарных операторов в комплексном евклидовом пространстве E образует группу (относительно умножения).*

Предложение 4.16. *Определитель унитарного оператора U по модулю равен единице: $|\det U| = 1$.*

Замечание. 1) Множество унитарных операторов с определителем $\det U = 1$ образует подгруппу группы всех унитарных операторов в E.

2) Группа всех унитарных операторов в n-мерном комплексном евклидовом пространстве E изоморфна группе

$U(n)$ унитарных матриц порядка n. Группа унитарных операторов с $\det U = 1$ в пространстве E изоморфна группе $SU(n)$.

Предложение 4.17. *Собственные значения унитарного оператора U по модулю равны единице.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение унитарного оператора U. Поскольку E — комплексное пространство, то существует собственный вектор $f \neq \mathbf{0}$ такой, что $Uf = \lambda f$. Тогда $\|Uf\| = |\lambda| \|f\|$. Поскольку оператор U унитарен, то $\|Uf\| = \|f\|$. Следовательно, $|\lambda| \|f\| = \|f\|$. В силу $\|f\| > 0$ получаем $|\lambda| = 1$. $\square$

Предложение 4.18. *Собственные векторы унитарного оператора U, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.*

Доказательство. Пусть λ и μ — различные собственные значения оператора U, а $f \neq \mathbf{0}$ и $g \neq \mathbf{0}$ — соответствующие собственные векторы. Тогда $Uf = \lambda f$, $Ug = \mu g$, а следовательно, $U^{-1} g = \mu^{-1} g$. (Мы учли, что оператор U обратим и число μ обратимо.) Имеем

$$(Uf, g) = \lambda (f, g),$$
$$(f, U^* g) = (f, U^{-1} g) = (f, \mu^{-1} g) = (\overline{\mu})^{-1} (f, g).$$

Мы использовали свойство $U^* = U^{-1}$. Поскольку $|\mu|^2 = 1$, то $\mu \overline{\mu} = 1$, откуда $(\overline{\mu})^{-1} = \mu$. Учитывая равенство $(Uf, g) = (f, U^* g)$, получаем $(\lambda - \mu)(f, g) = 0$. В силу $\lambda - \mu \neq 0$ отсюда следует, что $(f, g) = 0$. $\square$

Пример. Пусть $E = \mathbb{C}^n$. Пусть задана унитарная матрица $u \in M^n$. Тогда оператор $U = \widehat{u}$ умножения на матрицу u унитарен. Достаточно сослаться на то, что изображающей матрицей оператора U в стандартном базисе является сама матрица u, и применить предложение 4.14. Следовательно, *собственные значения унитарной матрицы по модулю* *равны* 1 (в первом семестре этот факт сообщался без доказательства, см. [2], §9 из главы 1), а *собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны в* $\mathbb{C}^n$.

Предложение 4.19. *Пусть* E *— вещественное евклидово пространство. Собственные значения изометрического оператора* V *по модулю равны единице.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}$ — ортонормированный базис в E и $v \in M^n$ — изображающая матрица оператора V в этом базисе. Поскольку V — изометрический оператор, то v — ортогональнвя матрица. Тогда v — унитарная матрица (любая ортогональная матрица является унитарной). Мы знаем, что собственные значения унитарной матрицы по модулю равны 1, а собственные значения оператора V совпадают с собственными значениями изображающей матрицы v. $\square$

Замечание. Если изометрический оператор V в вещественном евклидовом пространстве имеет различные вещественные собственные значения $\lambda = 1$ и $\mu = -1$, то отвечающие им собственные векторы взаимно ортогональны. Доказательство аналогично доказательству предложения 4.18. Разумеется, у невещественных собственных значений оператора V никаких собственных векторов нет.

4.3. **Преобразование ортонормированных базисов в комплексном евклидовом пространстве.** Пусть E — комплексное евклидово пространство размерности $n \geqslant 1$. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n\}$ — два ортонормированных базиса в E. Напомним, что оператор перехода B от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$ определяется по правилу $Be_k = \widetilde{e}_k$, $k = 1, \dots, n$. Его изображающая матрица в базисе $\mathbf{e}$ — это матрица перехода b от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Имеем:

$$\text{если} \quad x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, \ \text{то} \quad Bx = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \widetilde{e}_k.$$

Поскольку оба базиса ортонормированы, в силу предложения 2.6 выполнены равенства

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\xi^k|^2, \quad \|Bx\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\xi^k|^2.$$

Следовательно,

$$\|Bx\| = \|x\| \quad \forall x \in E.$$

Таким образом, *если оба базиса ортонормированы, то оператор перехода B — унитарный, а матрица перехода b унитарная.*

Вспомним закон преобразования изображающих матриц линейных операторов в E: если оператор A имеет изображающую матрицу a в базисе $\mathbf{e}$ и изображающую матрицу $\widetilde{a}$ в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$, то $\widetilde{a} = b^{-1}ab$.

Вспомним закон преобразования изображающих матриц полуторалинейных форм: если форма $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ имеет изображающую матрицу q в базисе $\mathbf{e}$ и изображающую матрицу $\widetilde{q}$ в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$, то $\widetilde{q} = b^*qb$.

Поскольку $b^{-1} = b^*$, то *законы преобразования изображающих матриц линейных операторов и полуторалинейных форм в комплексном евклидовом пространстве совпадают, если оба базиса ортонормированы.*

§ 5. Диагонализация самосопряженных и унитарных операторов

5.1. Диагонализация самосопряженных операторов.

Теорема 5.1. *Пусть E — комплексное евклидово пространство, $\dim E = n \geqslant 1$. Пусть $A \in \Lambda(E)$ — самосопряженный оператор. Тогда в E существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.*

Доказательство. Процесс состоит из n шагов.

Шаг 1. Рассмотрим характеристический многочлен $d_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Он имеет хотя бы один корень λ_1. Это собственное значение оператора A. Отметим, что $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ в силу предложения 4.7. Существует собственный вектор $f_1 \in E$, $f_1 \neq \mathbf{0}$, отвечающий собственному значению λ_1: $Af_1 = \lambda_1 f_1$. Будем считать, что $\|f_1\| = 1$ (этого всегда можно добиться за счет нормировки: деления некоторого собственного вектора на его норму). Если $n = 1$, то процесс закончен. Если $n > 1$, продолжаем процесс.

Шаг 2. Рассмотрим подпространство

$$E_2 := \{x \in E : \ x \perp f_1\}.$$

То есть E_2 — это ортогональное дополнение одномерного подпространства $F_1 = \{cf_1, \ c \in \mathbb{C}\}$. Имеем: $\dim E_2 = n - 1$. Проверим, что подпространство E_2 инвариантно относительно действия оператора A: если $x \in E_2$, то $Ax \in E_2$. Действительно, пусть $x \in E_2$, то есть $x \perp f_1$. Тогда

$$(Ax, f_1) = (x, Af_1) = \lambda_1(x, f_1) = 0.$$

Мы учли, что $A^* = A$ и $Af_1 = \lambda_1 f_1$. Таким образом, $Ax \perp f_1$, то есть $Ax \in E_2$. Тогда корректно определен оператор $A_2 \in \Lambda(E_2)$, являющийся сужением оператора A на подпространство E_2: $A_2 x = Ax$, $x \in E_2$. Оператор A_2 самосопряжен в пространстве E_2, поскольку его квадратичная форма вещественна: $(A_2 x, x) = (Ax, x) \in \mathbb{R}$, $x \in E_2$ (см. предложение 4.4). У оператора A_2 существует хотя бы одно собственное значение λ_2 (автоматически $\lambda_2 \in \mathbb{R}$). Существует собственный вектор $f_2 \in E_2$: $A_2 f_2 = \lambda_2 f_2$. Мы сразу выбираем его нормированным: $\|f_2\| = 1$. Тогда автоматически выполнено $Af_2 = \lambda_2 f_2$ и $f_2 \perp f_1$. Если $n = 2$, то искомый базис $\{f_1, f_2\}$ построен. Если $n > 2$, продолжаем процесс.

На k-ом шаге (где $k \leqslant n$) строится подпространство

$$E_k = \{x \in E : x \perp f_1, \dots, f_{k-1}\}, \quad \dim E_k = n - k + 1,$$

где $Af_j = \lambda_j f_j$, $j = 1, \ldots, k-1$, и векторы $f_1, \ldots, f_{k-1}$ попарно ортогональны и нормированы. Проверяется, что это подпространство инвариантно относительно оператора A. Рассматривается оператор $A_k \in \Lambda(E_k)$, определенный как сужение оператора A на E_k. Он самосопряжен. У него есть хотя бы одно собственное значение λ_k и отвечающий ему (нормированный) собственный вектор f_k. Автоматически выполнено $Af_k = \lambda_k f_k$ и $f_k \perp f_j$, $j = 1, \ldots, k-1$.

Этот процесс заканчивается на n-ом шаге. В результате в E построен ортонормированный базис $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ из собственных векторов оператора A:

$$Af_j = \lambda_j f_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Отметим, что автоматически собственные значения вещественны: $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. (Среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ могут быть повторяющиеся.) Изображающая матрица a оператора A в базисе $\mathbf{f}$ диагональна:

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\square$

Теорема 5.2. *Пусть E — вещественное евклидово пространство,* $\dim E = n \geqslant 1$. *Пусть $A \in \Lambda(E)$ — симметричный оператор. Тогда в E существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.*

Докажите теорему самостоятельно по аналогии с доказательством теоремы 5.1. Важно учесть, что заведомо все собственные значения оператора A вещественны; см. предложение 4.9. Каждому вещественному собственному значению отвечает хотя бы один собственный вектор (в вещественном пространстве существенно знать априори, что собственные значения вещественны).

5.2. **Спектральное разложение самосопряженного оператора.** Итак, мы доказали, что для самосопряженного оператора A существуют вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (собственные значения) и существует ортонормированный базис $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ в E, причем $Af_j = \lambda_j f_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Разложим произвольный вектор $x \in E$ по базису $\mathbf{f}$: $x = \sum_{j=1}^n \xi^j f_j$. В силу предложения 2.6 выполнено $\xi^j = (x, f_j)$. Тогда

$$Ax = \sum_{j=1}^n \xi^j A f_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \xi^j f_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j (x, f_j) f_j.$$

Эту формулу принято записывать в виде

$$A = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\cdot, f_j) f_j \tag{5.1}$$

и называть *спектральным разложением самосопряженного оператора* A.

Разложение (5.1) можно записать иначе, используя другой способ нумерации собственных значений. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_p$ — все различные собственные значения оператора A кратностей $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ соответственно ($\sum_{l=1}^p \sigma_l = n$). Поскольку оператор диагонализуем, то алгебраические кратности совпадают с геометрическими. Тогда каждое из чисел λ_j совпадает с одним (и только одним) из чисел μ_l. Базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ можно перегруппировать, объединяя собственные векторы, отвечающие одному и тому же значению μ_l, в l-ю группу (в этой группе будет σ_l векторов). Всего будет p групп. Тогда при новой нумерации мы получим ортонормированный базис

$$f_1^{(1)}, \ldots, f_{\sigma_1}^{(1)}; f_1^{(2)}, \ldots, f_{\sigma_2}^{(2)}; \ldots; f_1^{(p)}, \ldots, f_{\sigma_p}^{(p)}.$$

При этом

$$Af_k^{(l)} = \mu_l f_k^{(l)}, \qquad l = 1, \ldots, p, \quad k = 1, \ldots, \sigma_l.$$

Тогда разложение (5.1) принимает вид

$$A = \sum_{l=1}^{p} \mu_l \sum_{k=1}^{\sigma_l} (\cdot, f_k^{(l)}) f_k^{(l)}. \tag{5.2}$$

Векторы $f_1^{(l)}, \ldots, f_{\sigma_l}^{(l)}$ образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве $F_l = \mathrm{Ker}(A - \mu_l I)$, отвечающем собственному значению μ_l. Оператор

$$P_l = \sum_{k=1}^{\sigma_l} (\cdot, f_k^{(l)}) f_k^{(l)}$$

есть ортопроектор на подпространство F_l. Тогда спектральное разложение (5.2) можно записать в виде

$$A = \sum_{l=1}^{p} \mu_l P_l. \tag{5.3}$$

5.3. **Диагонализация унитарных операторов.**

Теорема 5.3. *Пусть E — комплексное евклидово пространство,* $\dim E = n \geqslant 1$. *Пусть $U \in \Lambda(E)$ — унитарный оператор. Тогда в E существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора U.*

Доказательство. Доказательство похоже на доказа-тельство теоремы 5.1. Процесс состоит из n шагов.

Шаг 1. Рассмотрим характеристический многочлен $d_U(\lambda) = \det(U - \lambda I)$. Он имеет хотя бы один корень λ_1. Это собственное значение оператора U. Отметим, что $|\lambda_1| = 1$ в силу предложения 4.17. Существует собственный вектор $f_1 \in E$, отвечающий собственному значению λ_1: $U f_1 = \lambda_1 f_1$. Будем считать, что $\|f_1\| = 1$. Если $n = 1$, то процесс закончен. Если $n > 1$, продолжаем процесс.

Шаг 2. Рассмотрим подпространство

$$E_2 := \{x \in E : \ x \perp f_1\}, \quad \dim E_2 = n - 1.$$

Проверим, что подпространство E_2 инвариантно относительно действия оператора U: если $x \in E_2$, то $Ux \in E_2$. Действительно, пусть $x \in E_2$, то есть $x \perp f_1$. Тогда

$$(Ux, f_1) = (x, U^* f_1) = (x, U^{-1} f_1) = (x, \lambda_1^{-1} f_1) = \lambda_1 (x, f_1) = 0.$$

Мы учли, что $U^* = U^{-1}$ и $U^{-1} f_1 = \lambda_1^{-1} f_1$ (а также равенство $(\overline{\lambda_1})^{-1} = \lambda_1$). Таким образом, $Ux \perp f_1$, то есть $Ux \in E_2$. Тогда корректно определен оператор $U_2 \in \Lambda(E_2)$, являющийся сужением оператора U на подпространство E_2: $U_2 x = Ux$, $x \in E_2$. Оператор U_2 унитарен в пространстве E_2, поскольку он сохраняет норму: $\|U_2 x\| = \|Ux\| = \|x\|$, $x \in E_2$ (см. предложение 4.12). У оператора U_2 существует хотя бы одно собственное значение λ_2 (автоматически $|\lambda_2| = 1$). Существует собственный вектор $f_2 \in E_2$: $U_2 f_2 = \lambda_2 f_2$. Мы сразу выбираем его нормированным: $\|f_2\| = 1$. Тогда автоматически выполнено $U f_2 = \lambda_2 f_2$ и $f_2 \perp f_1$. Если $n = 2$, то искомый базис $\{f_1, f_2\}$ построен. Если $n > 2$, продолжаем процесс.

На k-ом шаге (где $k \leqslant n$) строится подпространство

$$E_k = \{x \in E : x \perp f_1, \dots, f_{k-1}\}, \quad \dim E_k = n - k + 1,$$

где $U f_j = \lambda_j f_j$, $j = 1, \dots, k-1$, и векторы $f_1, \dots, f_{k-1}$ попарно ортогональны и нормированы. Проверяется, что это подпространство инвариантно относительно оператора U. Рассматривается оператор $U_k \in \Lambda(E_k)$, определенный как сужение оператора U на E_k. Он унитарен. У него есть хотя бы одно собственное значение λ_k и отвечающий ему (нормированный) собственный вектор f_k. Автоматически выполнено $U f_k = \lambda_k f_k$ и $f_k \perp f_j$, $j = 1, \dots, k-1$.

Этот процесс заканчивается на n-ом шаге. В результате в пространстве E построен ортонормированный базис $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ из собственных векторов оператора U:

$$U f_j = \lambda_j f_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отметим, что автоматически $|\lambda_j| = 1$, $j = 1, \ldots, n$. (Среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ могут быть повторяющиеся.) Изображающая матрица u оператора U в базисе $\mathbf{f}$ диагональна:

$$u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Замечание. Отметим, что аналога теоремы 5.3 для изометрических операторов в вещественном евклидовом пространстве нет. Причина в том, что изометрический оператор V может иметь невещественные собственные значения. Если хотя бы одно такое собственное значение имеется, то оператор V заведомо не диагонализуем. Исключение представляет случай, когда изометрический оператор V имеет только вещественные собственные значения (это могут быть числа 1 или -1). В этом случае справедлив аналог теоремы 5.3.

5.4. **Спектральное разложение унитарного оператора.** Итак, мы доказали, что для унитарного оператора U существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (собственные значения), такие что $|\lambda_j| = 1$, и существует ортонормированный базис $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ в E, причем $Uf_j = \lambda_j f_j$, $j = 1, \ldots, n$.

По аналогии с (5.1) получаем разложение

$$U = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\cdot, f_j) f_j, \tag{5.4}$$

которое называют *спектральным разложением унитарного оператора* U.

Разложение (5.4) можно записать иначе, используя другой способ нумерации собственных значений. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_p$ —

все различные собственные значения оператора U. По аналогии с (5.3) получаем

$$U = \sum_{l=1}^{p} \mu_l P_l,$$

где P_l — ортопроектор на собственное подпространство $F_l = \operatorname{Ker}(A - \mu_l I)$.

5.5. **Диагонализация эрмитовых матриц.** Рассмотрим эрмитову матрицу $a \in M^n$. Пусть $E = \mathbb{C}^n$ и $A = \widehat{a}$ — оператор умножения на матрицу a. Пусть $\mathbf{e} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^n$, то есть

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Изображающей матрицей оператора A в базисе $\mathbf{e}$ является сама матрица a.

В силу предложения 4.6 оператор A самосопряжен. Применяя теорему 5.1, получаем, что существуют вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и ортонормированный базис $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$ в $\mathbb{C}^n$, такие что

$$a\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Изображающая матрица $\widetilde{a}$ оператора A в базисе $\mathbf{f}$ диагональна:

$$\widetilde{a} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Мы знаем закон преобразования $\widetilde{a} = b^{-1}ab$, где b — матрица перехода от стандартного базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$. Матрица b составлена из столбцов $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$. Эта матрица унитарна, поскольку оба базиса ортонормированы.

Мы приходим к следующему результату, который формулируется на матричном языке.

Теорема 5.4. *Пусть $a \in M^n$ — эрмитова матрица. Тогда существуют диагональная матрица $\widetilde{a} \in M^n$ с вещественными элементами и унитарная матрица $b \in M^n$, такие что $\widetilde{a} = b^{-1}ab$.*

Одновременно мы получили практический способ диагонализации эрмитовой матрицы. Надо найти собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и ортонормированный базис из собственных векторов $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, так что $a\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j$, $j = 1, \dots, n$. Тогда матрица $\widetilde{a}$ имеет вид (5.5), а матрица b составлена из столбцов $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$.

Аналогично рассмотрим симметричную матрицу $a \in M^n$ с вещественными элементами. Пусть $E = \mathbb{R}^n$ и $A = \widehat{a}$ — оператор умножения на матрицу a. Пусть $\mathbf{e} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Изображающей матрицей оператора A в базисе $\mathbf{e}$ является сама матрица a.

Оператор A симметричен. Применяя теорему 5.2, получаем, что существуют вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и ортонормированный базис $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ в $\mathbb{R}^n$, такие что

$$a\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Изображающая матрица $\widetilde{a}$ оператора A в базисе $\mathbf{f}$ диагональна и имеет вид (5.5). Тогда $\widetilde{a} = b^{-1}ab$, где b — матрица перехода от стандартного базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$. Матрица b составлена из столбцов $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$. Эта матрица ортогональна, поскольку оба базиса ортонормированы.

Мы приходим к следующему результату.

Теорема 5.5. *Пусть $a \in M^n$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Тогда существуют диагональная матрица $\widetilde{a} \in M^n$ с вещественными элементами и ортогональная матрица $b \in M^n$, такие что $\widetilde{a} = b^{-1}ab$.*

5.6. **Диагонализация унитарных матриц.** Рассмотрим унитарную матрицу $u \in M^n$. Пусть $E = \mathbb{C}^n$ и $U = \widehat{u}$ — оператор умножения на матрицу u. Изображающей матрицей оператора U в стандартном базисе $\mathbf{e}$ является сама матрица u.

В силу предложения 4.14 оператор U унитарен. Применяя теорему 5.3, получаем, что существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ($|\lambda_j| = 1$) и ортонормированный базис $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$ в $\mathbb{C}^n$, такие что

$$u\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Изображающая матрица $\widetilde{u}$ оператора U в базисе $\mathbf{f}$ диагональна и имеет вид

$$\widetilde{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad |\lambda_j| = 1. \tag{5.6}$$

Тогда $\widetilde{u} = b^{-1}ub$, где b — матрица перехода от стандартного базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$. Матрица b составлена из столбцов $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$. Эта матрица унитарна, поскольку оба базиса ортонормированы.

Мы приходим к следующему результату.

Теорема 5.6. *Пусть $u \in M^n$ — унитарная матрица. Тогда существуют диагональная матрица $\widetilde{u} \in M^n$ вида* (5.6) *и унитарная матрица $b \in M^n$, такие что $\widetilde{u} = b^{-1}ub$.*

Замечание. Отметим, что аналога теоремы 5.6 для ортогональных матриц нет. Разумеется, ортогональная матрица $v \in M^n$ является унитарной и к ней применима теорема 5.6. Тем самым она диагонализуема в классе комплексных матриц. Но в классе вещественных матриц диагонализации нет за исключением случая, когда все собственные значения матрицы v вещественны, то есть равны 1 или -1.

§ 6. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов ортогональным преобразованием координат

6.1. **Приведение симметричной формы к простейшему виду в вещественном евклидовом пространстве.** Пусть E — вещественное евклидово пространство. Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$ — симметричная билинейная форма. Мы знаем, что $Q(x, y)$ можно привести к "сумме одноименных произведений" (а квадратичную форму $Q(x, x)$ — к сумме квадратов). Сейчас мы опишем новый способ приведения формы Q к простейшему виду: покажем, как это сделать за счет ортогонального преобразования координат.

Билинейной форме Q отвечает единственный оператор $A \in \Lambda(E)$ такой, что

$$Q(x, y) = (Ax, y), \quad x, y \in E.$$

Поскольку форма Q симметрична, то оператор A симметричен: $A^t = A$.

Фиксируем ортонормированный базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в E. Пусть $a \in M^n$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$ и $q \in M^n$ — изображающая матрица формы Q в базисе $\mathbf{e}$. В силу предложения 2.4 главы 4 $a = q$.

Применим теорему 5.2 к оператору A. Существуют вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (собственные значения оператора A) и ортонормированный базис из собственных векторов $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Имеем $Af_j = \lambda_j f_j$, $j = 1, \ldots, n$. В базисе $\mathbf{f}$ изображающая матрица $\widetilde{a}$ оператора A диагональна:

$$\widetilde{a} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода $b \in M^n$ от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$ является ортогональной матрицей. Вспомним закон преобразования

$\widetilde{a} = b^{-1}ab$. Форма Q имеет изображающую матрицу $\widetilde{q}$ в базисе $\mathbf{f}$. Закон преобразования: $\widetilde{q} = b^t qb$. Законы преобразования изображающих матриц для оператора A и для формы Q сейчас совпадают, поскольку $b^{-1} = b^t$. Таким образом, $\widetilde{q} = \widetilde{a}$. Тогда квадратичная форма $Q(x, x)$ в базисе $\mathbf{f}$ имеет вид суммы квадратов

$$Q(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\widetilde{\xi}^k)^2, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\xi}^k f_k.$$

Вспомним закон преобразования координат вектора x при переходе от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$. Пусть $x \in E$ имеет разложение $x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j$ в базисе $\mathbf{e}$ и разложение $x = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\xi}^k f_k$ в базисе $\mathbf{f}$. Тогда $\vec{x} = b\widetilde{\vec{x}}$, что равносильно $\widetilde{\vec{x}} = b^{-1}\vec{x} = b^t\vec{x}$. Здесь

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\xi}^1 \\ \vdots \\ \widetilde{\xi}^n \end{pmatrix}.$$

6.2. **Применение к классификации поверхностей второго порядка в $\mathbb{R}^3$.** В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим стандартный базис $\mathbf{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, где

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим уравнение второго порядка относительно декартовых координат вектора $\vec{x} = \xi^1\vec{e}_1 + \xi^2\vec{e}_2 + \xi^3\vec{e}_3$ в $\mathbb{R}^3$:

$$\sum_{k,l=1}^{3} q_{kl}\xi^k\xi^l + \sum_{j=1}^{3} \beta_j\xi^j + \gamma = 0. \tag{6.1}$$

Здесь $q_{kl}, \beta_j, \gamma \in \mathbb{R}$ $(k, l, j = 1, 2, 3)$ — заданные коэффициенты, причем $q_{kl} = q_{lk}$.

Сначала рассмотрим квадратичную форму

$$Q(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{k,l=1}^{3} q_{kl}\xi^k\xi^l.$$

Изображающей матрицей этой формы в базисе **e** является симметричная вещественная матрица

$$q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{pmatrix}.$$

Мы знаем, что собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы q вещественны и что существует ортонормированный базис $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ из собственных векторов матрицы q:

$$q\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Матрица перехода $b \in M^3$ от базиса **e** к базису **f** состоит из столбцов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ и является ортогональной матрицей: $b^{-1} = b^t$. Разложим вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ в новом базисе: $\vec{x} = \eta^1\vec{f}_1 + \eta^2\vec{f}_2 + \eta^3\vec{f}_3$. Связь старых и новых координат дается законом

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = b^t \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

В новых координатах квадратичная форма имеет вид суммы квадратов:

$$Q(\vec{x},\vec{x}) = \lambda_1(\eta^1)^2 + \lambda_2(\eta^2)^2 + \lambda_3(\eta^3)^2.$$

Используя связь координат (6.2), можно преобразовать линейные члены: $\sum_{j=1}^3 \beta_j\xi^j = \sum_{i=1}^3 \widetilde{\beta}_i\eta^i$. Тогда уравнение (6.1) принимает вид

$$\lambda_1(\eta^1)^2 + \lambda_2(\eta^2)^2 + \lambda_3(\eta^3)^2 + \sum_{i=1}^{3} \widetilde{\beta}_i\eta^i + \gamma = 0. \tag{6.3}$$

Замечание. Если $\lambda_j \neq 0$, то линейный член $\widetilde{\beta}_j \eta^j$ можно “убрать” за счет параллельного переноса. Сделаем замену

$$\zeta^j = \eta^j + \frac{\widetilde{\beta}_j}{2\lambda_j} \;\Rightarrow\; (\zeta^j)^2 = (\eta^j)^2 + \frac{\widetilde{\beta}_j}{\lambda_j}\eta^j + \left(\frac{\widetilde{\beta}_j}{2\lambda_j}\right)^2.$$

Тогда $\lambda_j(\eta^j)^2 + \widetilde{\beta}_j \eta^j = \lambda_j(\zeta^j)^2 + \gamma_j$.

6.3. **Центральные поверхности.** Рассмотрим **случай I**, когда

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 \neq 0.$$

Тогда все линейные члены можно убрать и уравнение (6.3) приводится к виду

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \widetilde{\gamma} = 0. \tag{6.4}$$

(Вместо $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ мы стали использовать более привычные в аналитической геометрии обозначения координат x, y, z.) Легко убедиться, что поверхность, заданная уравнением (6.4), имеет три оси симметрии (оси координат) и центр симметрии (начало координат). Отсюда название “центральные поверхности”.

Случай I.1. Пусть числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одного знака. Без ограничения общности считаем, что они положительны:

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 > 0.$$

(Если они отрицательны, то домножим уравнение на -1.)

Случай I.1а). Если $\widetilde{\gamma} > 0$, то получим пустое множество.

Случай I.1б). Если $\widetilde{\gamma} = 0$, то получим множество, состоящее из одной точки $x = y = z = 0$.

Случай I.1в). Если $\widetilde{\gamma} < 0$, то получим *эллипсоид*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 = \frac{|\widetilde{\gamma}|}{\lambda_1},\; b^2 = \frac{|\widetilde{\gamma}|}{\lambda_2},\; c^2 = \frac{|\widetilde{\gamma}|}{\lambda_3}.$$

См. рис. 1. Сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям, это эллипсы. Поверхность целиком находится в параллелепипеде

$$\{(x, y, z) : |x| \leqslant a, |y| \leqslant b, |z| \leqslant c\}.$$

Точки $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ (точки пересечения поверхности с осями симметрии) называются вершинами эллипсоида.

Частные случаи: если $a = b = c$, то это сфера; если $a = b$, то это эллипсоид вращения вокруг третьей оси; и пр.

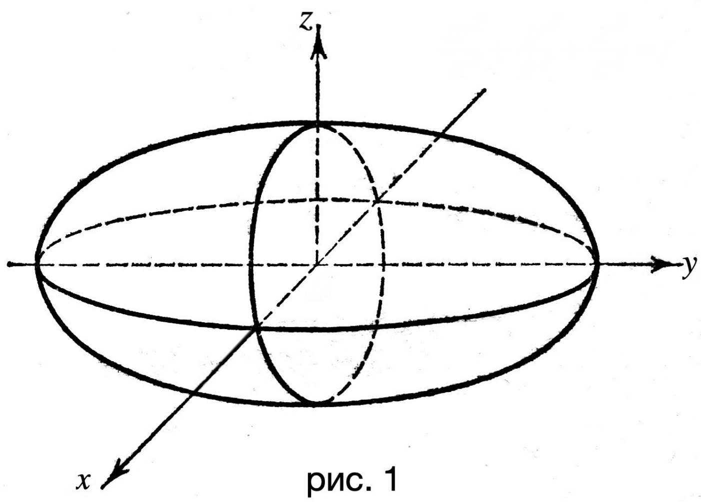

рис. 1

Случай I.2. Пусть одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ отличается знаком от двух других. Без ограничения общности считаем, что

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0.$$

Случай I.2a). Если $\widetilde{\gamma} < 0$, то получим *однополостной гиперболоид*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 = \frac{|\widetilde{\gamma}|}{\lambda_1},\ b^2 = \frac{|\widetilde{\gamma}|}{\lambda_2},\ c^2 = \frac{|\widetilde{\gamma}|}{|\lambda_3|}.$$

См. рис. 2. Сечение плоскостью Oxy — это эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

так называемое “горлышко” гиперболоида. Горизонтальные сечения (плоскостями, параллельными плоскости Oxy) —

это эллипсы (они расширяются с ростом $|z|$). Сечения координатными плоскостями Oyz, Oxz — это гиперболы:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0; \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0.$$

Поверхность связная (отсюда название “однополостной”) и неограниченная.

Частный случай: если $a = b$, то это поверхность вращения.

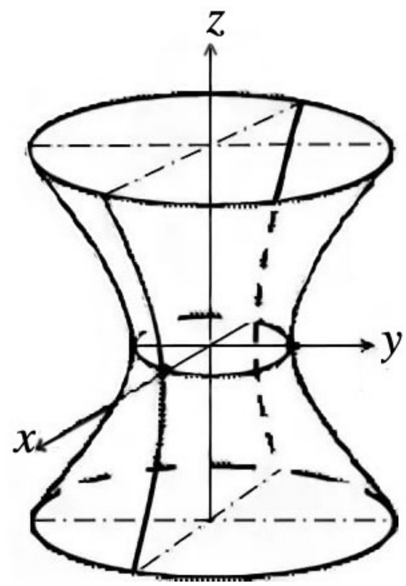

рис. 2

Случай I.2б). Если $\widetilde{\gamma} = 0$, то получим *конус*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a^2 = \frac{1}{\lambda_1},\ b^2 = \frac{1}{\lambda_2},\ c^2 = \frac{1}{|\lambda_3|}.$$

См. рис. 3. Горизонтальные сечения (плоскостями, параллельными плоскости Oxy) — это эллипсы. Сечения координатными плоскостями Oyz, Oxz — это пара пересекающихся прямых:

$$\frac{y}{b} = \pm\frac{z}{c}, \quad x = 0; \qquad \frac{x}{a} = \pm\frac{z}{c}, \quad y = 0.$$

Точка $(0, 0, 0)$ — вершина конуса.

Частный случай: если $a = b$, то это круговой конус.

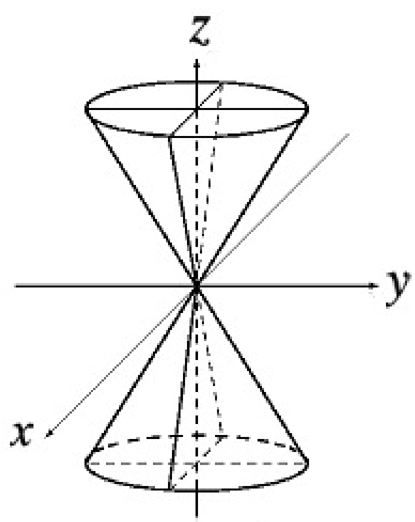

рис. 3

Случай I.2в). Если $\widetilde{\gamma} > 0$, то получим *двуполостной гиперболоид*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a^2 = \frac{\widetilde{\gamma}}{\lambda_1},\ b^2 = \frac{\widetilde{\gamma}}{\lambda_2},\ c^2 = \frac{\widetilde{\gamma}}{|\lambda_3|}.$$

См. рис. 4. Поверхность состоит из двух связных частей (отсюда название — двуполостной) и неограничена. В слое $|z| < c$ нет точек поверхности. Горизонтальные сечения (плоскостями, параллельными плоскости Oxy) — это эллипсы. Сечения координатными плоскостями Oyz, Oxz — это гиперболы:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0; \qquad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad y = 0.$$

Поверхность имеет две вершины $(0, 0, c)$, $(0, 0, -c)$.

Частный случай: если $a = b$, то это поверхность вращения.

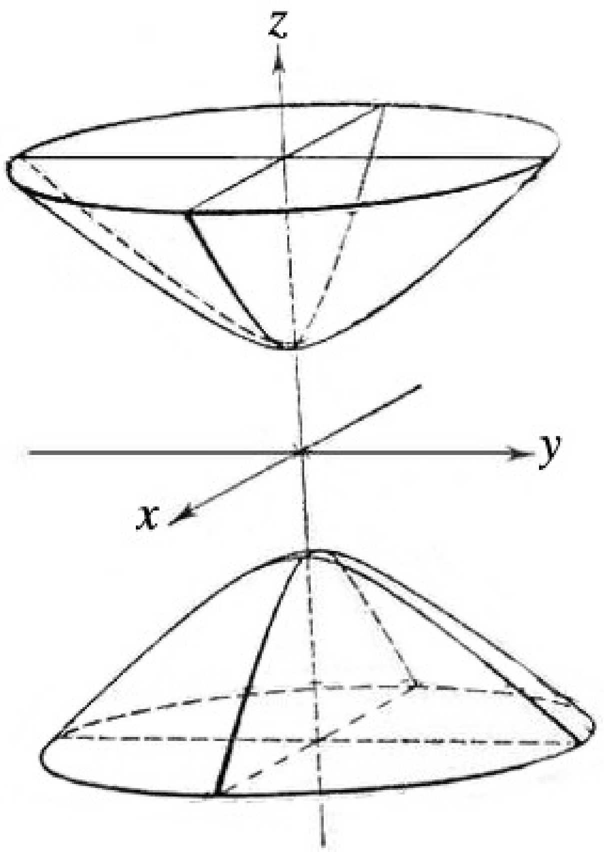

рис. 4

6.4. **Нецентральные поверхности.** Изучим **случай II**, когда одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ равно нулю. Без ограничения общности считаем, что

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

Тогда в уравнении (6.3) можно убрать линейные члены с η^1, η^2. Уравнение принимает вид

$$\lambda_1(\zeta^1)^2 + \lambda_2(\zeta^2)^2 + \widetilde{\beta}_3\zeta^3 + \widetilde{\gamma} = 0. \tag{6.5}$$

Случай II.1. Пусть $\widetilde{\beta}_3 \neq 0$. Тогда можно убрать свободный член в (6.5) за счет параллельного переноса:

$$\widetilde{\zeta}^3 = \zeta^3 + \frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{\beta}_3} \;\Rightarrow\; \lambda_1(\zeta^1)^2 + \lambda_2(\zeta^2)^2 + \widetilde{\beta}_3\widetilde{\zeta}^3 = 0.$$

Мы пришли к уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \widetilde{\beta}_3 z = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \widetilde{\beta}_3 \neq 0.$$

Эта поверхность имеет ось симметрии (ось Oz), но не имеет центра симметрии, отсюда название "нецентральная" поверхность.

Случай II.1а). Пусть числа λ_1, λ_2 одного знака. Без ограничения общности считаем, что $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Будем считать, что $\widetilde{\beta}_3 < 0$ (иначе изменим направление третьей оси на противоположное). Получаем *эллиптический параболоид*:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a^2 = \frac{|\widetilde{\beta}_3|}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{|\widetilde{\beta}_3|}{\lambda_2}.$$

См. рис. 5. Поверхность целиком расположена в полупространстве $z \geqslant 0$ и неограничена. Горизонтальные сечения — эллипсы. Сечения координатными плоскостями Oxz, Oyz — параболы:

$$z = \frac{x^2}{a^2}, \quad y = 0; \qquad z = \frac{y^2}{b^2}, \quad x = 0.$$

Поверхность имеет одну вершину $(0, 0, 0)$.

Частный случай: если $a = b$, это круговой параболоид (поверхность вращения).

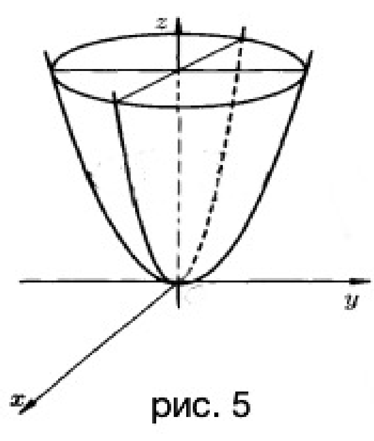

рис. 5

Случай II.1б). Пусть числа λ_1, λ_2 разных знаков. Без ограничения общности считаем, что $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Будем считать, что $\widetilde{\beta}_3 < 0$. Получаем *гиперболический параболоид*:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad a^2 = \frac{|\widetilde{\beta}_3|}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{|\widetilde{\beta}_3|}{|\lambda_2|}.$$

См. рис. 6. Поверхность неограничена и имеет форму седла. Седловая точка $(0, 0, 0)$. Горизонтальные сечения — гиперболы (при $z > 0$ ось Ox — действительная ось, а Oy — мнимая ось гиперболы; при $z < 0$ ось Ox — мнимая ось, а Oy — действительная ось гиперболы). Сечения координатными плоскостями Oxz, Oyz — параболы:

$$z = \frac{x^2}{a^2}, \;\; y = 0; \qquad z = -\frac{y^2}{b^2}, \;\; x = 0.$$

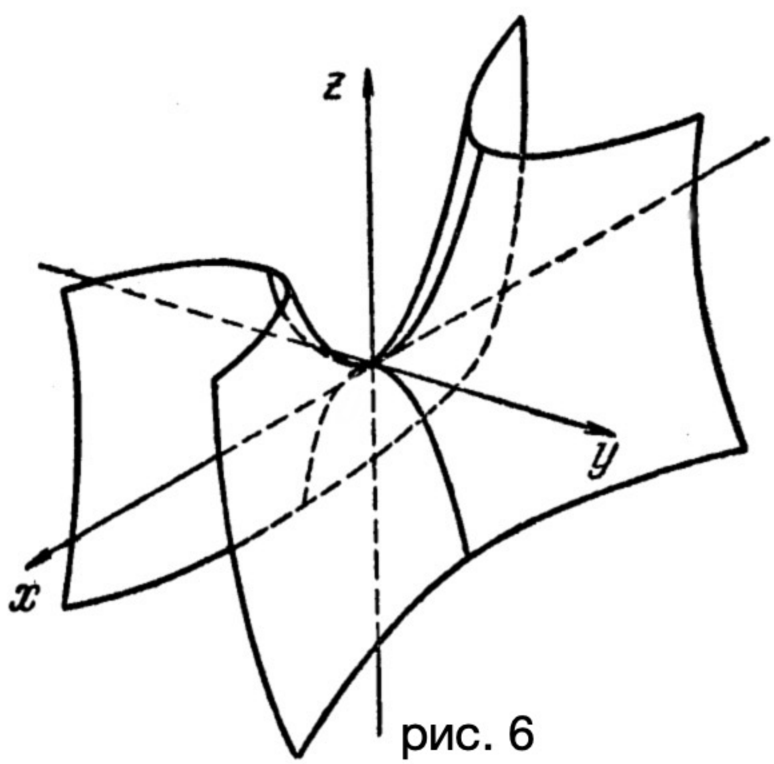

рис. 6

Случай II.2. Пусть теперь $\widetilde{\beta}_3 = 0$ в уравнении (6.5). Тогда уравнение принимает вид

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \widetilde{\gamma} = 0. \tag{6.6}$$

Сначала рассмотрим случай, когда λ_1, λ_2 — числа одного знака. Можно считать, что

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$$

Случай II.2а). Если $\widetilde{\gamma} > 0$, то получим пустое множество.

Случай II.2б). Если $\widetilde{\gamma} = 0$, то получим прямую $x = y = 0$.

Случай II.2в). Если $\widetilde{\gamma} < 0$, то получим *эллиптический цилиндр*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = \frac{|\widetilde{\gamma}|}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{|\widetilde{\gamma}|}{\lambda_2}.$$

См. рис. 7. Горизонтальное сечение поверхности — это один и тот же эллипс при всех z. Ось цилиндра — ось Oz.

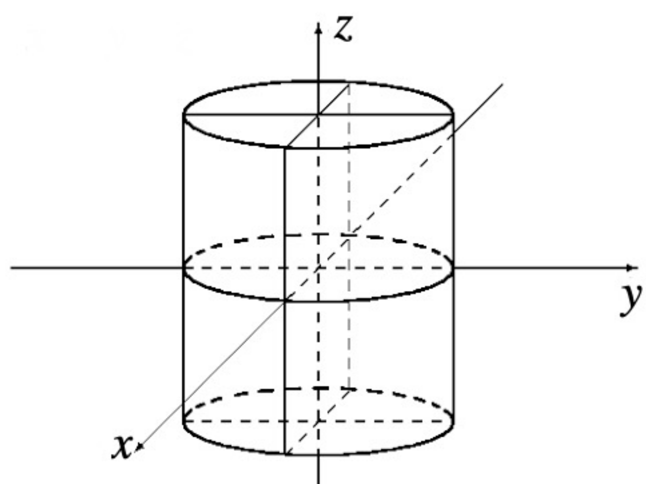

рис. 7

Пусть теперь числа λ_1, λ_2 имеют разные знаки: считаем, что

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Случай II.2г). Если $\widetilde{\gamma} \neq 0$ (пусть для определенности $\widetilde{\gamma} < 0$), то получим *гиперболический цилиндр*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = \frac{|\widetilde{\gamma}|}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{|\widetilde{\gamma}|}{|\lambda_2|}.$$

См. рис. 8. Горизонтальное сечение поверхности — это одна и та же гипербола при всех z. Ось цилиндра — ось Oz.

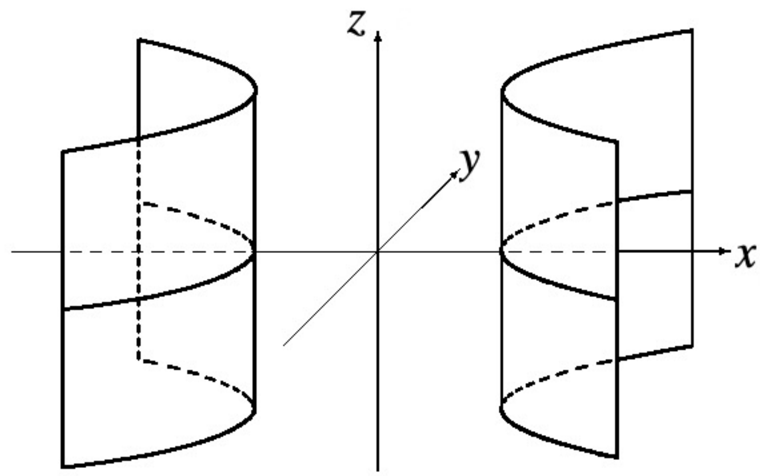

рис. 8

Случай II.2д). Если $\widetilde{\gamma} = 0$, то получим пару пересекающихся плоскостей:

$$\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}.$$

6.5. **Случай III.** Осталось рассмотреть случай III, когда только одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ отлично от нуля. Без ограничения общности считаем, что

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

Тогда в уравнении (6.3) можно убрать линейный член с η^1. Уравнение принимает вид

$$\lambda_1(\zeta^1)^2 + \widetilde{\beta}_2\zeta^2 + \widetilde{\beta}_3\zeta^3 + \widetilde{\gamma} = 0. \tag{6.7}$$

Случай III.1. Если линейные члены здесь не равны нулю тождественно (то есть, хотя бы один из коэффициентов $\widetilde{\beta}_2$ и $\widetilde{\beta}_3$ отличен от нуля), то поворотом в плоскости переменных ζ^2, ζ^3 можно добиться, чтобы линейный член был только один:

$$\lambda_1(\zeta^1)^2 + \widehat{\beta}_2\widehat{\zeta}^2 + \widetilde{\gamma} = 0, \quad \widehat{\beta}_2 \neq 0.$$

Наконец, за счет параллельного переноса можно устранить свободный член:

$$\check{\zeta}^2 = \widehat{\zeta}^2 + \frac{\widetilde{\gamma}}{\widehat{\beta}_2} \;\Rightarrow\; \lambda_1(\zeta^1)^2 + \widehat{\beta}_2\check{\zeta}^2 = 0.$$

Мы пришли к уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \widehat{\beta}_2 y = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -\frac{\lambda_1}{\widehat{\beta}_2} x^2.$$

Это *параболический цилиндр.* См. рис. 9. Горизонтальное сечение поверхности — это одна и та же парабола при всех z. Ось цилиндра — ось Oz.

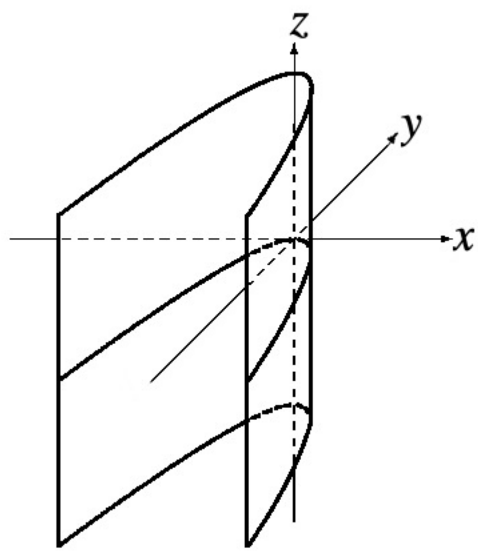

рис. 9

Случай III.2. Пусть линейные члены в (6.7) равны нулю: $\widetilde{\beta}_2 = \widetilde{\beta}_3 = 0$. Тогда приходим к уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \widetilde{\gamma} = 0.$$

Считаем $\lambda_1 > 0$ (иначе домножим уравнение на -1).

Случай III.2а). Если $\widetilde{\gamma} > 0$, то получим пустое множество.

Случай III.2б). Если $\widetilde{\gamma} = 0$, то получим плоскость: $x = 0$.

Случай III.2в). Если $\widetilde{\gamma} < 0$, то получим пару параллельных плоскостей:

$$x = \pm\sqrt{\frac{|\widetilde{\gamma}|}{\lambda_1}}.$$

Мы проанализировали все случаи. За исключением вырожденных случаев получили следующую классификацию поверхностей второго порядка.

Вывод. Всего существует девять типов поверхностей второго порядка. Это четыре центральных поверхности: эллипсоид, однополостной гиперболоид, конус, двуполостной гиперболоид; два параболоида — эллиптический и гиперболический; и три цилиндических поверхности: эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр.

§ 7. Обобщенная задача на собственные значения

7.1. **Положительно определенные операторы.**

Определение 7.1. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Оператор $B \in \Lambda(E)$ называется положительно определенным, если $(Bx, x) > 0$ при всех $x \neq \mathbf{0}$.*

Если B положительно определен, пишем $B > 0$.

Предложение 7.2. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Оператор $B \in \Lambda(E)$ положительно определен тогда и только тогда, когда он самосопряжен и все его собственные значения положительны.*

Доказательство. Необходимость. Дано: $B > 0$. Тогда квадратичная форма (Bx, x) заведомо принимает вещественные значения (фактически $(Bx, x) \geqslant 0$, $x \in E$). В силу предложения 4.4 оператор B самосопряжен: $B^* = B$.

Пусть μ — собственное значение оператора B, $g \neq \mathbf{0}$ — собственный вектор, отвечающий μ. Тогда $Bg = \mu g$. Домножим это равенство скалярно на g:

$$(Bg, g) = \mu \|g\|^2 \;\Leftrightarrow\; \mu = \frac{(Bg, g)}{\|g\|^2}.$$

Поскольку $B > 0$, то $(Bg, g) > 0$. Следовательно, $\mu > 0$.

Достаточность. Дано: $B^* = B$, все собственные значения B положительны.

В силу теоремы 5.1 существуют вещественные числа

$$\mu_1, \dots, \mu_n$$

(собственные значения) и ортонормированный базис

$$\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_n\}$$

из собственных векторов, такие что $Bg_k = \mu_k g_k$, $k = 1, \dots, n$. Сейчас нам дано, что $\mu_k > 0$, $k = 1, \dots, n$.

Разложим произвольный вектор $x \in E$ по базису $\mathbf{g}$: $x = \sum_{k=1}^n \xi^k g_k$. Тогда $Bx = \sum_{k=1}^n \mu_k \xi^k g_k$. Следовательно,

$$(Bx, x) = \sum_{k=1}^n \mu_k |\xi^k|^2.$$

Здесь все коэффициенты μ_k положительны. Если $x \neq \mathbf{0}$, то хотя бы одна координата не равна нулю: $\xi^j \neq 0$, а потому правая часть положительна. Следовательно, $B > 0$. $\square$

Предложение 7.3. *Если $B > 0$, то форма $\langle x, y\rangle := (Bx, y)$, $x, y \in E$, обладает всеми свойствами скалярного произведения.*

Доказательство. Очевидно, $\langle x, y\rangle$ — полуторалинейная форма в E.

Эрмитовость следует из самосопряженности оператора B:

$$\langle x, y\rangle = (Bx, y) = (x, By) = \overline{(By, x)} = \overline{\langle y, x\rangle}, \quad x, y \in E.$$

Свойство положительной определенности вытекает из положительной определенности оператора B:

$$\langle x, x\rangle = (Bx, x) > 0, \quad x \neq \mathbf{0}. \qquad \square$$

Предложение 7.4. *Если $B > 0$, то $\operatorname{Ker} B = \{\mathbf{0}\}$ и, следовательно, существует B^{-1}.*

Доказательство. Если $x \in \operatorname{Ker} B$, то $Bx = \mathbf{0}$. Тогда также $(Bx, x) = 0$. Отсюда следует, что $x = \mathbf{0}$ (поскольку при $x \neq \mathbf{0}$ выполнено $(Bx, x) > 0$. □

7.2. **Обобщенная задача на собственные значения.** Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $A, B \in \Lambda(E)$, причем $A^* = A$, $B > 0$. Рассмотрим задачу

$$Ax = \lambda Bx. \tag{7.1}$$

Нас интересуют значения параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых существует нетривиальное решение $x \neq \mathbf{0}$ уравнения (7.1). В силу предложения 7.4 существует оператор B^{-1}, а потому (7.1) равносильно уравнению

$$B^{-1}Ax = \lambda x. \tag{7.2}$$

Предложение 7.5. *Оператор $C := B^{-1}A$ самосопряжен относительно нового скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму оператора C (относительно нового скалярного произведения):

$$\langle Cx, x \rangle = (BCx, x) = (Ax, x), \quad x \in E.$$

Поскольку A самосопряжен, то $(Ax, x) \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\langle Cx, x \rangle \in \mathbb{R}$, $x \in E$. Значит, C самосопряжен относительно нового скалярного произведения. □

Теорема 7.6. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $A, B \in \Lambda(E)$, причем $A^* = A$, $B > 0$. Тогда существуют вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и существует базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ в E такие, что $Af_j = \lambda_j Bf_j$, $j = 1, \ldots, n$. При этом выполнены равенства*

$$(Bf_j, f_l) = \delta_{jl}, \quad (Af_j, f_l) = \lambda_j \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Применим теорему 5.1 к самосопряженному оператору C в евклидовом пространстве E, снабженном новым скалярным произведением $\langle x, y \rangle$. Собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ оператора C вещественны. Существует ортонормированный (по новому скалярному произведению) базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ из собственных векторов:

$$Cf_j = \lambda_j f_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{7.3}$$

Имеем

$$\langle f_j, f_l \rangle = \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \dots, n. \tag{7.4}$$

Подставляя $C = B^{-1}A$ в (7.3), получаем, что $Af_j = \lambda_j Bf_j$, $j = 1, \dots, n$. Далее, с учетом $\langle x, y \rangle = (Bx, y)$, (7.4) принимает вид $(Bf_j, f_l) = \delta_{jl}$. Тогда $(Af_j, f_l) = \lambda_j (Bf_j, f_l) = \lambda_j \delta_{jl}$. $\square$

В вещественном евклидовом пространстве E также вводится понятие положительно определенного оператора B.

Определение 7.7. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Оператор $B \in \Lambda(E)$ называется положительно определенным, если $B^t = B$ и $(Bx, x) > 0$ при $x \neq \mathbf{0}$.*

Форму $\langle x, y \rangle = (Bx, y)$ можно принять за новое скалярное произведение в E. По аналогии с доказательством теоремы 7.6 докажите самостоятельно следующую теорему.

Теорема 7.8. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Пусть $A, B \in \Lambda(E)$, причем $A^t = A$, $B^t = B > 0$. Тогда существуют вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и существует базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ в E, такие что $Af_j = \lambda_j Bf_j$, $j = 1, \dots, n$. При этом выполнены равенства*

$$(Bf_j, f_l) = \delta_{jl}, \quad (Af_j, f_l) = \lambda_j \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \dots, n.$$

7.3. **Приведение эрмитовых форм к простейшему виду.**

Теорема 7.9. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ — эрмитова полуторалинейная форма. Тогда существует ортонормированный базис*

$\{f_1, \ldots, f_n\}$, в котором форма Q имеет простейший вид: если $x = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k$, $y = \sum_{l=1}^n \eta^l f_l$, то

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi^k \overline{\eta^k},$$

причем $\lambda_j \in \mathbb{R}$ при $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Форме Q отвечает единственный оператор $A \in \Lambda(E)$ такой, что $Q(x, y) = (Ax, y)$, $x, y \in E$. Поскольку форма Q эрмитова, то $A^* = A$. Тогда в силу теоремы 5.1 существуют вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (собственные значения) и существует ортонормированный базис $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ из собственных векторов, так что

$$Af_j = \lambda_j f_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Если $x = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k$, то $Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi^k f_k$. Пусть $y = \sum_{l=1}^n \eta^l f_l$. Поскольку базис $\mathbf{f}$ ортонормированный, имеем:

$$Q(x, y) = (Ax, y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi^k \overline{\eta^k}. \qquad \square$$

В условиях теоремы 7.9 квадратичная форма имеет вид

$$Q(x, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\xi^k|^2, \quad x = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k,$$

который называют “суммой квадратов” (подразумеваются квадраты модулей координат).

Теперь мы покажем, что можно одновременно привести две формы к простейшему виду при условии, что одна из них положительно определена.

Теорема 7.10. *Пусть E — комплексное евклидово пространство. Пусть $Q, R \in \widetilde{\mathcal{F}}(E)$ — эрмитовы полуторалинейные формы, причем*

$$R(x, x) > 0, \quad x \neq \mathbf{0}. \tag{7.5}$$

Тогда существует базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *в* E, *в котором обе формы* Q, R *имеют простейший вид*: *если* $x = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k$, $y = \sum_{l=1}^n \eta^l f_l$, *то*

$$R(x,y) = \sum_{k=1}^n \xi^k \overline{\eta^k}, \quad Q(x,y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi^k \overline{\eta^k}, \tag{7.6}$$

причем $\lambda_j \in \mathbb{R}$ *при* $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Форме Q отвечает единственный оператор $A \in \Lambda(E)$, такой что $Q(x,y) = (Ax, y)$, $x, y \in E$. Поскольку форма Q эрмитова, то $A^* = A$.

Форме R отвечает единственный оператор $B \in \Lambda(E)$, такой что $R(x,y) = (Bx, y)$, $x, y \in E$. Поскольку форма R эрмитова, то $B^* = B$. Более того, из (7.5) следует, что оператор B положительно определен.

В силу теоремы 7.6 существуют вещественные числа

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$$

и существует базис

$$\{f_1, \ldots, f_n\}$$

в E, такие что

$$Af_j = \lambda_j Bf_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

При этом выполнено

$$(Bf_k, f_l) = \delta_{kl}, \quad (Af_k, f_l) = \lambda_k \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, n.$$

Пусть $x = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k$, $y = \sum_{l=1}^n \eta^l f_l$. Тогда

$$R(x,y) = (Bx, y) = \sum_{k,l=1}^n \xi^k \overline{\eta^l} (Bf_k, f_l)$$

$$= \sum_{k,l=1}^n \xi^k \overline{\eta^l} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n \xi^k \overline{\eta^k}.$$

Этим доказана первая формула в (7.6). Аналогично

$$Q(x,y) = (Ax,y) = \sum_{k,l=1}^{n} \xi^k \overline{\eta^l} (Af_k, f_l)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \xi^k \overline{\eta^l} \lambda_k \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi^k \overline{\eta^k},$$

что доказывает вторую формулу в (7.6). □

В условиях теоремы 7.10 обе квадратичные формы имеют вид "суммы квадратов":

$$R(x,x) = \sum_{k=1}^{n} |\xi^k|^2, \quad Q(x,x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\xi^k|^2, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k f_k.$$

Справедлив аналог теоремы 7.10 в вещественном евклидовом пространстве. Докажите эту теорему самостоятельно.

Теорема 7.11. *Пусть E — вещественное евклидово пространство. Пусть $Q, R \in \mathcal{F}(E)$ — симметричные билинейные формы, причем*

$$R(x,x) > 0, \quad x \neq \mathbf{0}.$$

Тогда существует базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ в E, в котором обе формы Q, R имеют простейший вид: если $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k f_k$, $y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l f_l$, то

$$R(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \eta^k, \quad Q(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi^k \eta^k,$$

причем $\lambda_j \in \mathbb{R}$ при $j = 1, \dots, n$.

Список литературы

[1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Линейная алгебра, выпуск* 1. *Матрицы. Определители.* Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 1999. – 41 с.

[2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., Фаддеев М. М., *Линейная алгебра, выпуск* 2. *Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений.* Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 1999. – 49 с.

[3] Суслина Т. А., *Линейная алгебра. II семестр, выпуск* 1. Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 76 с.

[4] Суслина Т. А., *Линейная алгебра. II семестр*, *выпуск* 2. Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 35 с.

[5] Суслина Т. А., *Линейная алгебра. II семестр*, *выпуск* 3. Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 39 с.