САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

Т. А. Суслина

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
II СЕМЕСТР
Выпуск 3

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2021 г.

- Рецензенты: проф., д.ф.-м.н. Ф. В. Петров;
  к.ф.-м.н. Н. Н. Сеник.
- Печатается по решению учебно-методической комиссии физического факультета СПбГУ.

Т. А. Суслина.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. II СЕМЕСТР. Выпуск 3. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 39 с.

Настоящее пособие содержит теоретический материал по курсу “Высшая алгебра”, который читается во втором семестре студентам первого курса физического факультета СПбГУ. Выпуск 3 содержит главу 3 “Линейные и билинейные формы”. Пособие может быть полезно преподавателям, ведущим занятия по курсу “Высшая алгебра”, а также студентам, изучающим этот предмет.

Выпуск 3 является продолжением выпусков 1, 2 учебно-методического пособия “Линейная алгебра. II семестр” (см. [3,4]), основанного на курсе лекций для студентов физического факультета СПбГУ. Выпуск 3 содержит главу 3 “Линейные и билинейные формы”.

Глава 3. Линейные и билинейные формы

§ 1. Линейные формы

1.1. **Определение. Примеры.** Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем K, где $K = \mathbb{C}$ или $K = \mathbb{R}$.

Определение 1.1. *Линейный оператор $f : E \to K^1$ называется линейным функционалом или линейной формой в пространстве E.*

Иначе говоря, линейная форма — это линейная числовая функция от векторного аргумента (из E). Значение формы $f \in \Lambda(E, K^1)$ на векторе $x \in E$ принято обозначать

$$f(x) = \langle f, x\rangle \in K.$$

Определение 1.2. *Двойственным пространством E' к пространству E называется пространство линейных форм*:

$$E' := \Lambda(E, K^1).$$

Поскольку $\dim \Lambda(E, K^1) = \dim E \cdot \dim K^1$, а пространство K^1 одномерно, то

$$\dim E' = \dim E.$$

Отметим *свойство билинейности* скобок $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

1) Для любой формы $f \in E'$, любых векторов $x, y \in E$ и любых чисел $\alpha, \beta \in K$ выполнено

$$\langle f, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, y\rangle.$$

Это свойство выражает линейность оператора $f \in \Lambda(E, K^1)$.

2) Для любых форм $f_1, f_2 \in E'$, любых чисел $\gamma_1, \gamma_2 \in K$ и любого вектора $x \in E$ выполнено

$$\langle \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2, x\rangle = \gamma_1 \langle f_1, x\rangle + \gamma_2 \langle f_2, x\rangle.$$

Это свойство следует из определения действий над операторами (сложение операторов и умножение оператора на число).

Примеры

- Пусть $E = \mathbb{R}^n$, а форма $f \in E'$ сопоставляет вектору $\vec{x}$ его первую координату:

$$\langle f, \vec{x}\rangle = \xi^1, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

- Пусть $E = \mathbb{R}^n$, а форма $f \in E'$ сопоставляет вектору $\vec{x}$ сумму его координат:

$$\langle f, \vec{x}\rangle = \xi^1 + \cdots + \xi^n, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

- Пусть $E = \Omega_{n-1}$, а форма $f \in E'$ сопоставляет многочлену $P(t)$ его значение в точке $t = 1$:

$$\langle f, P\rangle = P(1), \quad P \in \Omega_{n-1}.$$

- Пусть $E = \Omega_{n-1}$, а форма $f \in E'$ сопоставляет многочлену $P(t)$ значение интеграла от $P(t)$ по промежутку $[0, 1]$:

$$\langle f, P\rangle = \int\limits_0^1 P(t)\, dt, \quad P \in \Omega_{n-1}.$$

- Пусть $E = M^n$ — пространство матриц $n \times n$ с комплексными элементами (т.е. $K = \mathbb{C}$), а форма $f \in E'$ сопоставляет матрице $a \in M^n$ ее след:

$$\langle f, a\rangle = \operatorname{Tr} a, \quad a \in M^n.$$

1.2. **Двойственный базис в E'.** Пусть в пространстве E задан базис $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Зададим линейные формы $g^1, \dots, g^n \in E'$ по правилу

$$\langle g^k, e_j \rangle = \delta_j^k, \quad j, k = 1, \dots, n, \tag{1.1}$$

где δ_j^k — символ Кронекера. Тогда значение формы g^k на векторе $x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$ равно k-й координате этого вектора:

$$\langle g^k, x \rangle = \xi^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Предложение 1.3. *При сделанных предположениях набор* $\mathbf{g} = \{g^1, \dots, g^n\}$ *образует базис в пространстве* E'.

Доказательство. Проверим сначала, что набор $\{g^1, \dots, g^n\}$ линейно независим. Пусть некоторая линейная комбинация форм $g^1, \dots, g^n$ равна нулевой форме:

$$\sum_{k=1}^n \beta_k g^k = \mathbf{0}_{E'}. \tag{1.2}$$

Требуется доказать, что тогда все коэффициенты β_k равны нулю. Применим форму (1.2) к вектору e_j:

$$\sum_{k=1}^n \beta_k \langle g^k, e_j \rangle = \langle \mathbf{0}_{E'}, e_j \rangle = 0.$$

Учитывая (1.1), получаем

$$\sum_{k=1}^n \beta_k \delta_j^k = \beta_j = 0.$$

Это верно при всех $j = 1, \dots, n$.

Поскольку $\dim E' = \dim E = n$, любой линейно независимый набор из n линейных форм образует базис в E'. Следовательно, набор $\mathbf{g} = \{g^1, \dots, g^n\}$ образует базис в E'. $\square$

Определение 1.4. *Пусть* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— базис в пространстве* E*. Пусть линейные формы* $g^1, \ldots, g^n \in E'$ *заданы соотношениями* (1.1)*. Базис* $\mathbf{g} = \{g^1, \ldots, g^n\}$ *в пространстве* E' *называется базисом, двойственным к базису* $\mathbf{e}$*.*

Предложение 1.5. *Пусть* $\mathbf{e}$ *и* $\mathbf{g}$ *— двойственные базисы в* E *и в* E'*.*
1) *Если вектор* $x \in E$ *разложен по базису* $\mathbf{e}$*:* $x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j$*, то*

$$\langle g^k, x \rangle = \xi^k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Если форма $f \in E$ *разложена по базису* $\mathbf{g}$*:* $f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k g^k$*, то*

$$\langle f, e_j \rangle = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

2) *Если* $f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k g^k$ *и* $x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j$*, то*

$$\langle f, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \xi^k.$$

Доказательство. Первое равенство — не что иное, как определение форм g^k.

Второе равенство получается с учетом линейности скобок по первому аргументу и (1.1):

$$\langle f, e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \varphi_k g^k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \langle g^k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \delta_j^k = \varphi_j.$$

Третье равенство получается из первого и линейности скобок по первому аргументу:

$$\langle f, x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \varphi_k g^k, x \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \langle g^k, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \xi^k. \qquad \square$$

1.3. **Второе двойственное пространство.** Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем K, и пусть E' — двойственное пространство. Рассмотрим пространство E'', двойственное к E':

$$E'' := (E')',$$

и назовем его *вторым двойственным* пространством к E.

Покажем, что E'' можно естественным образом отождествить с исходным пространством E.

По заданному $x \in E$ построим элемент $X \in E''$ по правилу

$$X(f) := \langle f, x\rangle, \quad f \in E'. \tag{1.3}$$

Функционал X над E' является линейным в силу линейности скобок по первому аргументу:

$$X(\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2) = \langle \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2, x\rangle = \gamma_1\langle f_1, x\rangle + \gamma_2\langle f_2, x\rangle = \\ = \gamma_1 X(f_1) + \gamma_2 X(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in E' \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in K.$$

Предложение 1.6. *Отображение $J : E \to E''$, переводящее элемент $x \in E$ в функционал $X \in E''$ по правилу* (1.3), *является изоморфизмом.*

Доказательство. Проверим, что отображение J — линейное. Пусть $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in K$. Пусть $X = Jx$, $Y = Jy$. Требуется проверить, что выполнено равенство

$$J(\alpha x + \beta y) = \alpha X + \beta Y.$$

Для любого $f \in E'$ имеем

$$(J(\alpha x + \beta y))(f) = \langle f, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, y\rangle \\ = \alpha X(f) + \beta Y(f) = (\alpha X + \beta Y)(f).$$

В первом переходе использовано определение отображения J, во втором — линейность скобок по второму аргументу, в третьем — снова определение J. Наконец, последнее равенство выполнено за счет определения линейных операций над операторами (в данном случае — над формами из пространства $E'' = \Lambda(E', K^1)$).

Проверим теперь, что линейное отображение $J : E \to E''$ является взаимно-однозначным (т.е. изоморфизмом). Нам известно, что

$$\dim E'' = \dim E' = \dim E.$$

Тогда достаточно убедиться в том, что $\operatorname{Ker} J = \{\mathbf{0}_E\}$. (См. следствие 6.20 в главе 1.)

Пусть $x \in \operatorname{Ker} J$, то есть $Jx = X = \mathbf{0}_{E''}$. Это означает, что

$$X(f) = \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall f \in E'. \tag{1.4}$$

Фиксируем базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в пространстве E. Пусть $\mathbf{g} = \{g^1, \ldots, g^n\}$ — базис в E', двойственный к $\mathbf{e}$. Разложим x по выбранному базису: $x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$. Формы $g^1, \ldots, g^n$ определены по правилу $\langle g^k, x\rangle = \xi^k$. Подставим $f = g^k$ в (1.4). Получаем $\xi^k = \langle g^k, x\rangle = 0$. Это верно при всех $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $x = \mathbf{0}_E$.

Мы убедились, что $\operatorname{Ker} J = \{\mathbf{0}_E\}$. Тем самым $J : E \to E''$ — изоморфизм. □

Отображение $J : E \to E''$ называют *естественным изоморфизмом*, а сами пространства E'' и E отождествляют (подразумевая отождествление с помощью отображения J).

1.4. **Пример.** Пусть $E = \Omega_{n-1}$ — пространство многочленов степени не выше $n - 1$. Фиксируем n различных точек $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. Рассмотрим многочлены $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ степени $(n-1)$, удовлетворяющие соотношениям

$$e_j(t_k) = \delta_j^k, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Такие многочлены легко выписать явно:

$$e_j(t) = \frac{\Pi_{k\neq j}(t - t_k)}{\Pi_{k\neq j}(t_j - t_k)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Проверим, что многочлены $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис в Ω_{n-1}. Поскольку $\dim E = n$, то достаточно проверить, что набор $e_1, \ldots, e_n$ линейно независим.

Предположим, что

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Пусть $t = t_k$. Имеем:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(t_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_j^k = \alpha_k.$$

Это верно при всех $k = 1, \ldots, n$. Тем самым, мы убедились в линейной независимости набора $e_1, \ldots, e_n$.

Двойственный базис к базису $e_1, \ldots, e_n$ образуют формы $g^1, \ldots, g^n \in E'$, определенные соотношениями $\langle g^k, P\rangle := P(t_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Действительно, выполнено

$$\langle g^k, e_j\rangle := e_j(t_k) = \delta_j^k, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Замечание о возможном применении. Неизвестную функцию $f(t)$ можно интерполировать многочленом $P(t)$, имеющим те же значения в заданном наборе точек, т.е. $P(t_k) = f(t_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Например, это может быть полезным при измерениях какой-либо физической величины $f(t)$, зависящей от времени t (по результатам n измерений в моменты времени $t_1, \ldots, t_n$ мы приближаем функцию $f(t)$ многочленом $P(t)$). Такой многочлен имеет вид

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) e_k(t)$$

и называется интерполяционным многочленом Лагранжа для функции f.

1.5. **Преобразование двойственных базисов.** Пусть в пространстве E заданы базисы

$$\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\} \ \text{ и } \ \widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n\}.$$

Разложим векторы $\widetilde{e}_k$ в исходном базисе:

$$\widetilde{e}_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j e_j, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.5}$$

и составим матрицу перехода b от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$:

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \ldots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \ldots & \beta_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \ldots & \beta_n^n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{g} = \{g^1, \ldots, g^n\}$ — базис в E', двойственный к базису $\mathbf{e}$, и пусть $\widetilde{\mathbf{g}} = \{\widetilde{g}^1, \ldots, \widetilde{g}^n\}$ — базис в E', двойственный к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Найдем формулы перехода от базиса $\mathbf{g}$ к базису $\widetilde{\mathbf{g}}$.

Вычислим величину $\langle g^m, \widetilde{e}_k \rangle$ двумя разными способами. Используя (1.5), получаем

$$\langle g^m, \widetilde{e}_k \rangle = \left\langle g^m, \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j \langle g^m, e_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j \delta_j^m = \beta_k^m. \tag{1.6}$$

Разложим форму g^m в базисе $\widetilde{\mathbf{g}}$:

$$g^m = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^m \widetilde{g}^j, \quad m = 1, \ldots, n.$$

Используя это разложение, вычислим $\langle g^m, \widetilde{e}_k \rangle$ другим способом:

$$\langle g^m, \widetilde{e}_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^m \langle \widetilde{g}^j, \widetilde{e}_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^m \delta_k^j = \gamma_k^m. \tag{1.7}$$

Сопоставляя (1.6) и (1.7), получаем $\gamma_k^m = \beta_k^m$. Следовательно,

$$g^m = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^m \widetilde{g}^j, \quad m = 1, \ldots, n. \tag{1.8}$$

Чтобы записать закон (1.8) в матричной форме, введем символические столбцы

$$\vec{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ \vdots \\ g^n \end{pmatrix}, \quad \vec{\widetilde{\mathbf{g}}} = \begin{pmatrix} \widetilde{g}^1 \\ \widetilde{g}^2 \\ \vdots \\ \widetilde{g}^n \end{pmatrix}.$$

Тогда (1.8) можно записать в виде

$$\vec{\mathbf{g}} = b\vec{\widetilde{\mathbf{g}}} \;\Leftrightarrow\; \vec{\widetilde{\mathbf{g}}} = b^{-1}\vec{\mathbf{g}}. \tag{1.9}$$

Вывод: базисы в E' преобразуются по *контравариантному* закону.

Сравнивая закон преобразования базисов в E (см. формулу (1.2) из гл. 2) и закон (1.9) преобразования базисов в E', приходим к выводу, что матрица перехода c от $\mathbf{g}$ к $\widetilde{\mathbf{g}}$ связана с матрицей b соотношением $c^t = b^{-1}$, то есть $c = (b^t)^{-1}$.

Отметим, что относительно матрицы c закон (1.9) является ковариантным (как и должно быть в любом пространстве, в частности, в E'). Но если "хозяйкой" законов преобразования назначить матрицу b, то закон (1.9) — контравариантный.

Теперь получим закон преобразования координат в E'. Пусть элемент $f \in E'$ разложен в базисах $\mathbf{g}$ и $\widetilde{\mathbf{g}}$:

$$f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k g^k, \quad f = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\varphi}_j \widetilde{g}^j.$$

Составим векторы из координат f:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\widetilde{f}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_1 \\ \widetilde{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\varphi}_n \end{pmatrix}.$$

Закон преобразования координат в E' нам известен: как и во всяком конечномерном пространстве, это контравариантный закон относительно матрицы c: $\vec{\tilde{f}} = c^{-1}\vec{f}$. Так как $c^{-1} = b^t$, получаем ковариантный закон (относительно матрицы b):

$$\vec{\tilde{f}} = b^t \vec{f}. \tag{1.10}$$

Вывод: базисы в E и двойственные координаты в E' преобразуются по *ковариантному* закону; координаты в E и двойственные базисы в E' преобразуются по *контравариантному* закону (относительно матрицы перехода b).

1.6. **Преобразование изображающих матриц.** Пусть в пространстве E заданы базисы

$$\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\} \ \text{ и } \ \widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n\}.$$

Пусть b — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Пусть $\mathbf{g}$ — базис в E', двойственный к базису $\mathbf{e}$, и пусть $\widetilde{\mathbf{g}}$ — базис в E', двойственный к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Матрицей перехода от базиса $\mathbf{g}$ к базису $\widetilde{\mathbf{g}}$ является матрица $c = (b^t)^{-1}$.

Пусть $A \in \Lambda(E)$ и a — изображающая матрица оператора A в базисе $\mathbf{e}$. Пусть $\widetilde{a}$ — изображающая матрица оператора A в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$. Вспомним закон преобразования:

$$\widetilde{a} = b^{-1}ab.$$

1) Рассмотрим оператор $R \in \Lambda(E')$. Пусть r — изображающая матрица оператора R в базисе $\mathbf{g}$, а $\widetilde{r}$ — изображающая матрица оператора R в базисе $\widetilde{\mathbf{g}}$. Тогда

$$\widetilde{r} = c^{-1}rc \ \Leftrightarrow \ \widetilde{r} = b^t r (b^t)^{-1}.$$

2) Рассмотрим теперь оператор $P \in \Lambda(E, E')$. Пусть p — изображающая матрица оператора P в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{g}$, а $\widetilde{p}$ — изображающая матрица оператора P в паре базисов $\widetilde{\mathbf{e}}, \widetilde{\mathbf{g}}$. Тогда равенство $Px = f$ равносильно равенству $p\vec{x} = \vec{f}$. Воспользуемся законами $\vec{x} = b\vec{\tilde{x}}$, $\vec{\tilde{f}} = b^t\vec{f}$. Получаем:

$$\vec{\tilde{f}} = b^t\vec{f} = b^t p\vec{x} = b^t p b\vec{\tilde{x}}.$$

Это означает, что

$$\widetilde{p} = b^t p b. \tag{1.11}$$

3) Наконец, рассмотрим оператор $S \in \Lambda(E', E)$. Пусть s — изображающая матрица оператора S в паре базисов $\mathbf{g}, \mathbf{e}$, а $\widetilde{s}$ — изображающая матрица оператора S в паре базисов $\widetilde{\mathbf{g}}, \widetilde{\mathbf{e}}$. Тогда равенство $Sf = x$ равносильно равенству $s\vec{f} = \vec{x}$. Воспользуемся законами $\vec{\widetilde{x}} = b^{-1}\vec{x}$, $\vec{f} = (b^t)^{-1}\vec{\widetilde{f}}$. Получаем:

$$\vec{\widetilde{x}} = b^{-1}\vec{x} = b^{-1}s\vec{f} = b^{-1}s(b^t)^{-1}\vec{\widetilde{f}}.$$

Это означает, что

$$\widetilde{s} = b^{-1}s(b^t)^{-1}. \tag{1.12}$$

§ 2. Билинейные формы

2.1. Определение. Примеры.

Определение 2.1. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем K, где $K = \mathbb{C}$ или $K = \mathbb{R}$. Билинейной формой в пространстве E называется отображение $Q : E \times E \to K$, линейное по каждому аргументу в отдельности:*

$$\begin{aligned} Q(\alpha x_1 + \beta x_2, y) &= \alpha Q(x_1, y) + \beta Q(x_2, y), \\ &\qquad x_1, x_2, y \in E,\ \alpha, \beta \in K; \\ Q(x, \lambda y_1 + \mu y_2) &= \lambda Q(x, y_1) + \mu Q(x, y_2), \\ &\qquad x, y_1, y_2 \in E,\ \lambda, \mu \in K. \end{aligned}$$

Таким образом, $Q(\cdot, y)$ — это линейная форма при фиксированном $y \in E$; $Q(x, \cdot)$ — это линейная форма при фиксированном $x \in E$.

Примеры.

- Пусть $E = \mathbb{R}^n$ и форма Q задана равенством

$$Q(\vec{x}, \vec{y}) = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2 + \cdots + \xi^n\eta^n,$$

где

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$

- Пусть $E = \mathbb{R}^2$ и форма Q задана равенством

$$Q(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} \xi^1 & \eta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{vmatrix} = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1,$$

где

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}.$$

- Пусть $E = M^n$ — пространство матриц с вещественными элементами и форма Q задана равенством

$$Q(a, b) = \operatorname{Tr} ab, \quad a, b \in M^n.$$

- Пусть $E = \Omega_{n-1}$ — пространство многочленов степени не выше $n-1$. Пусть форма Q задана равенством

$$Q(P_1, P_2) = \int\limits_0^1 (P_1(t)P_2'(t) - P_1'(t)P_2(t))\, dt, \quad P_1, P_2 \in \Omega_{n-1}.$$

2.2. **Пространство билинейных форм.** Обозначим через $\mathcal{F}(E)$ множество всех билинейных форм в E. Введем линейные операции на множестве $\mathcal{F}(E)$.

Определение 2.2. *Суммой форм $Q_1, Q_2 \in \mathcal{F}(E)$ называется отображение $Q = Q_1 + Q_2 : E \times E \to K$, определенное по правилу*

$$Q(x, y) := Q_1(x, y) + Q_2(x, y), \quad x, y \in E.$$

Проверьте самостоятельно, что так определенное отображение Q является снова билинейной формой. Проверьте также, что действие сложения на $\mathcal{F}(E)$ ассоциативно и коммутативно. Роль нейтрального элемента в $\mathcal{F}(E)$ играет *нулевая билинейная форма* $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{\mathcal{F}(E)}$, определенная по правилу

$$\mathbf{0}(x, y) = 0, \quad x, y \in E.$$

Для каждой формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ существует противоположная форма $-Q$ такая, что $Q + (-Q) = \mathbf{0}$. Эта форма определена соотношением

$$(-Q)(x, y) = -Q(x, y), \quad x, y \in E.$$

Таким образом, $\mathcal{F}(E)$ образует *абелеву группу по сложению.*

Определение 2.3. *Произведением формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ на число $\alpha \in K$ называется отображение $\alpha Q : E \times E \to K$, определенное по правилу*

$$(\alpha Q)(x, y) := \alpha Q(x, y), \quad x, y \in E.$$

Проверьте самостоятельно, что так определенное отображение αQ является снова билинейной формой. Проверьте также, что выполнены свойства (аксиомы линейного пространства):

1) $(\alpha + \beta)Q = \alpha Q + \beta Q$ для любых $Q \in \mathcal{F}(E)$, $\alpha, \beta \in K$;

2) $\alpha(Q_1 + Q_2) = \alpha Q_1 + \alpha Q_2$ для любых $Q_1, Q_2 \in \mathcal{F}(E)$, $\alpha \in K$;

3) $\alpha(\beta Q) = (\alpha\beta)Q$ для любых $Q \in \mathcal{F}(E)$, $\alpha, \beta \in K$;

4) $1 \cdot Q = Q$ для любого $Q \in \mathcal{F}(E)$.

Мы установили следующую теорему.

Теорема 2.4. *Множество $\mathcal{F}(E)$ образует линейное пространство над полем K.*

Предложение 2.5. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем K, где либо $K = \mathbb{C}$, либо $K = \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{F}(E)$ — пространство билинейных форм в E. Тогда* $\dim \mathcal{F}(E) = n^2$.

Доказательство. Фиксируем базис $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ в E. Рассмотрим билинейные формы Q^{kl}, $k, l = 1, \dots, n$, определенные соотношениями

$$Q^{kl}(x, y) = \xi^k \eta^l, \quad x, y \in E,$$

где

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, \quad y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l. \tag{2.1}$$

Тогда выполнено

$$Q^{kl}(e_j, e_m) = \delta^k_j \delta^l_m, \quad k, l, j, m = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

Проверим, что набор $\{Q^{kl}\}, k, l = 1, \dots, n$, образует базис в $\mathcal{F}(E)$. Поскольку набор состоит из n^2 форм, отсюда будет следовать, что $\dim \mathcal{F}(E) = n^2$.

Сначала проверим, что данный набор линейно независим. Предположим, что

$$\sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} Q^{kl} = \mathbf{0}_{\mathcal{F}(E)}.$$

Тогда

$$\sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} Q^{kl}(x, y) = 0, \quad x, y \in E.$$

Подставим $x = e_j$ и $y = e_m$:

$$0 = \sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} Q^{kl}(e_j, e_m) = \sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} \delta^k_j \delta^l_m = \gamma_{jm}.$$

Таким образом, $\gamma_{jm} = 0$ при всех $j, m = 1, \dots, n$. Следовательно, набор $\{Q^{kl}\}$ линейно независим.

Покажем теперь, что любую билинейную форму Q можно разложить по набору $\{Q^{kl}\}$. Пусть $x, y \in E$ имеют вид (2.1).

Имеем:

$$Q(x,y) = Q\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l\Big) = \sum_{k,l=1}^{n} \xi^k \eta^l Q(e_k, e_l) =$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} q_{kl} \xi^k \eta^l = \sum_{k,l=1}^{n} q_{kl} Q^{kl}(x,y) = \Big(\sum_{k,l=1}^{n} q_{kl} Q^{kl}\Big)(x,y), \tag{2.3}$$

где $q_{kl} := Q(e_k, e_l)$. Ввиду произвольности векторов x, y, из (2.3) следует разложение

$$Q = \sum_{k,l=1}^{n} q_{kl} Q^{kl}. \qquad \square$$

2.3. **Оператор билинейной формы.** Пусть $\Gamma \in \Lambda(E, E')$. Построим по оператору Γ билинейную форму

$$Q_\Gamma(x,y) = \langle \Gamma x, y \rangle, \quad x, y \in E. \tag{2.4}$$

Предложение 2.6. *Отображение $J : \Lambda(E, E') \to \mathcal{F}(E)$, определенное по правилу $J\Gamma = Q_\Gamma$, где Q_Γ определено в (2.4), является изоморфизмом.*

Доказательство. Сначала проверим, что отображение J является линейным. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Lambda(E, E')$ и $\alpha, \beta \in K$. При любых $x, y \in E$ имеем:

$$Q_{\alpha\Gamma_1+\beta\Gamma_2}(x,y) = \langle (\alpha\Gamma_1 + \beta\Gamma_2)x, y \rangle = \alpha\langle \Gamma_1 x, y\rangle + \beta\langle \Gamma_2 x, y \rangle =$$
$$= \alpha Q_{\Gamma_1}(x,y) + \beta Q_{\Gamma_2}(x,y) = (\alpha Q_{\Gamma_1} + \beta Q_{\Gamma_2})(x,y).$$

Это и означает, что

$$Q_{\alpha\Gamma_1+\beta\Gamma_2} = \alpha Q_{\Gamma_1} + \beta Q_{\Gamma_2} \;\Leftrightarrow\; J(\alpha\Gamma_1 + \beta\Gamma_2) = \alpha J\Gamma_1 + \beta J\Gamma_2.$$

Проверим теперь, что линейный оператор J является изоморфизмом. Поскольку нам известно, что

$$\dim \Lambda(E, E') = \dim \mathcal{F}(E) = n^2,$$

то достаточно только убедиться в том, что $\operatorname{Ker} J = \{\mathbf{0}_{E\to E'}\}$. (См. следствие 6.20 из гл. 1).

Пусть $\Gamma \in \operatorname{Ker} J$, то есть $J\Gamma = Q_\Gamma = \mathbf{0}_{\mathcal{F}(E)}$. Тогда

$$Q_\Gamma(x, y) = \langle \Gamma x, y \rangle = 0 \quad \forall x, y \in E.$$

Фиксируем сначала x. Тот факт, что $\langle \Gamma x, y \rangle = 0$ для любого $y \in E$, означает, что $\Gamma x = \mathbf{0}_{E'}$. Поскольку это верно для произвольного $x \in E$, делаем вывод, что $\Gamma = \mathbf{0}_{E \to E'}$. $\square$

Таким образом, оператор J устанавливает взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами из E в E' и билинейными формами в E.

Следствие 2.7. *Для любой формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ существует единственный линейный оператор $\Gamma = \Gamma_Q : E \to E'$ такой, что $Q(x, y) = \langle \Gamma x, y \rangle$, $x, y \in E$.*

Определение 2.8. *В условиях следствия 2.7 оператор Γ_Q называется оператором билинейной формы Q.*

2.4. **Изображающая матрица билинейной формы.** Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в пространстве E. Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$. Обозначим

$$q_{kl} := Q(e_k, e_l), \quad k, l = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Тогда согласно (2.3)

$$Q(x, y) = \sum_{k,l=1}^{n} q_{kl} \xi^k \eta^l, \quad \text{где } x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k,\ y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l. \tag{2.6}$$

Определение 2.9. *Изображающей матрицей билинейной формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ в базисе* $\mathbf{e}$ *называется матрица*

$$q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \ldots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \ldots & q_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{1n} & q_{2n} & \ldots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

где элементы q_{kl} определены в (2.5).

Обратите внимание на *особенность матрицы* q: первый номер элемента q_{kl} — это номер столбца, а второй — номер строки.

Предложение 2.10. *Пусть* $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *— базис в* E *и* $\mathbf{g} = \{g^1, \dots, g^n\}$ *— двойственный базис в* E'*. Пусть* $Q \in \mathcal{F}(E)$ *и* q *— изображающая матрица формы* Q *в базисе* $\mathbf{e}$*. Пусть* $\Gamma = \Gamma_Q \in \Lambda(E, E')$ *— оператор формы* Q*. Пусть* γ *— изображающая матрица оператора* Γ *в паре базисов* $\mathbf{e}, \mathbf{g}$:

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{n1} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{1n} & \gamma_{2n} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицы q *и* γ *совпадают*:

$$q = \gamma.$$

Доказательство. В соответствии с определением изображающей матрицы оператора, элементы γ_{kl} матрицы γ — это координаты форм $\Gamma e_k \in E'$ в базисе $\mathbf{g}$:

$$\Gamma e_k = \sum_{l=1}^{n} \gamma_{kl} g^l, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$q_{km} = Q(e_k, e_m) = \langle \Gamma e_k, e_m \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^{n} \gamma_{kl} g^l, e_m \right\rangle =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \gamma_{kl} \langle g^l, e_m \rangle = \sum_{l=1}^{n} \gamma_{kl} \delta^l_m = \gamma_{km},$$

при $k, m = 1, \dots, n$. Таким образом, $\gamma = q$. □

Замечание. Предложение 2.10 дает конструктивный способ восстановить форму Q_Γ по заданному оператору Γ. По известному оператору Γ надо найти его изображающую матрицу γ в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{g}$ и затем построить форму Q, имеющую изображающую матрицу $q = \gamma$ в базисе $\mathbf{e}$.

2.5. **Преобразование изображающей матрицы билинейной формы.** Пусть $\mathbf{e}$ и $\widetilde{\mathbf{e}}$ — два базиса в пространстве E, и пусть b — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Пусть $\mathbf{g}$ — базис в E', двойственный к $\mathbf{e}$, а $\widetilde{\mathbf{g}}$ — базис в E', двойственный к $\widetilde{\mathbf{e}}$.

Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$ и $\Gamma = \Gamma_Q \in \Lambda(E, E')$ — оператор билинейной формы Q. Пусть γ — изображающая матрица оператора Γ в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{g}$ и $\widetilde{\gamma}$ — изображающая матрица оператора Γ в паре базисов $\widetilde{\mathbf{e}}, \widetilde{\mathbf{g}}$. Закон преобразования изображающих матриц операторов из E в E' нам известен (см. (1.11)):

$$\widetilde{\gamma} = b^t \gamma b. \tag{2.7}$$

Пусть q — изображающая матрица формы Q в базисе $\mathbf{e}$, а $\widetilde{q}$ — изображающая матрица формы Q в базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$. В силу предложения 2.10 выполнены равенства $q = \gamma$ и $\widetilde{q} = \widetilde{\gamma}$. Поэтому из (2.7) вытекает закон преобразования

$$\widetilde{q} = b^t q b. \tag{2.8}$$

Зададим *отношение эквивалентности* на классе матриц M^n с комплексными элементами: будем говорить, что матрица $\widetilde{q}$ эквивалентна матрице q, если найдется неособая матрица $b \in M^n$ такая, что выполнено (2.8).

Нетрудно убедиться, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности:

1) $q \sim q$ (выполнено $q = b^t q b$, где b — единичная матрица);

2) если $\widetilde{q} \sim q$, то $q \sim \widetilde{q}$ (из $\widetilde{q} = b^t q b$ следует, что $q = (b^{-1})^t \widetilde{q} b^{-1}$);

3) если $\widetilde{q} \sim q$ и $\widehat{q} \sim \widetilde{q}$, то $\widehat{q} \sim q$ (из $\widetilde{q} = b^t q b$ и $\widehat{q} = \widehat{b}^t \widetilde{q} \widehat{b}$ следует, что $\widehat{q} = (b\widehat{b})^t q (b\widehat{b})$).

Таким образом, если E — комплексное пространство, то изображающие матрицы формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ в различных базисах эквивалентны друг другу (в смысле введенного отношения эквивалентности).

Можно задать аналогичное отношение эквивалентности на классе матриц с вещественными элементами (тогда все матрицы q, $\widetilde{q}$, b должны иметь вещественные элементы). Если E — вещественное пространство, то изображающие матрицы формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ в различных базисах эквивалентны друг другу.

2.6. **Ядро и ранг билинейной формы.**

Определение 2.11. *Ядром билинейной формы* $Q \in \mathcal{F}(E)$ *называется множество*

$$\operatorname{Ker} Q := \{x \in E : Q(x,y) = 0 \forall y \in E\}.$$

Предложение 2.12. *Пусть* $Q \in \mathcal{F}(E)$, *а* $\Gamma_Q \in \Lambda(E, E')$ *— оператор формы* Q. *Тогда*

$$\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} \Gamma_Q.$$

Доказательство. По определению оператора Γ_Q выполнено $Q(x,y) = \langle \Gamma_Q x, y \rangle$, $x, y \in E$. Справедлива следующая цепочка эквивалентных соотношений:

$$x \in \operatorname{Ker} Q \;\Leftrightarrow\; Q(x,y) = 0 \;\forall y \in E$$

$$\Leftrightarrow \langle \Gamma_Q x, y \rangle = 0 \;\forall y \in E \;\Leftrightarrow\; \Gamma_Q x = \mathbf{0}_{E'} \;\Leftrightarrow\; x \in \operatorname{Ker} \Gamma_Q. \quad \square$$

Определение 2.13. *Рангом билинейной формы* $Q \in \mathcal{F}(E)$ *называется ранг оператора* Γ_Q:

$$\operatorname{rank} Q := \operatorname{rank} \Gamma_Q.$$

Поскольку ранг оператора Γ_Q совпадает с рангом его изображающей матрицы γ в паре двойственных базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{g}$, а матрица γ совпадает с изображающей матрицей q формы Q в базисе $\mathbf{e}$, то *ранг формы* Q *совпадает с рангом ее изображающей матрицы* q:

$$\operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} q.$$

Учитывая, что ранг оператора Γ_Q (т.е. размерность образа этого оператора) определен инвариантно и не зависит от выбора базиса, делаем вывод: если q и $\widetilde{q}$ связаны отношением $\widetilde{q} = b^t q b$, где $\det b \neq 0$, то $\operatorname{rank} \widetilde{q} = \operatorname{rank} q$.

2.7. **Транспонирование билинейной формы.**

Определение 2.14. *Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$. Форма $Q^t \in \mathcal{F}(E)$, определенная равенством*

$$Q^t(x, y) := Q(y, x), \quad x, y \in E,$$

называется транспонированной к форме Q.

Перечислим свойства операции транспонирования:

1) $(Q^t)^t = Q$ для любой формы $Q \in \mathcal{F}(E)$;

2) линейность: для любых форм $Q_1, Q_2 \in \mathcal{F}(E)$ и любых чисел $\alpha, \beta \in K$ выполнено

$$(\alpha Q_1 + \beta Q_2)^t = \alpha Q_1^t + \beta Q_2^t.$$

Предложение 2.15. *Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$. Пусть q — изображающая матрица формы Q в некотором базисе* $\mathbf{e}$. *Тогда изображающей матрицей формы Q^t в том же базисе* $\mathbf{e}$ *является матрица q^t.*

Доказательство. Обозначим изображающую матрицу формы Q^t в базисе $\mathbf{e}$ через p. В соответствии с определением изображающей матрицы формы (см. пункт 2.4) и с определением транспонированной формы имеем:

$$p_{kl} = Q^t(e_k, e_l) = Q(e_l, e_k) = q_{lk}, \quad k, l = 1, \ldots, n.$$

Это и означает, что $p = q^t$. $\square$

Определение 2.16. *Форма $Q \in \mathcal{F}(E)$ называется симметричной, если $Q^t = Q$, то есть $Q(x, y) = Q(y, x)$ при любых $x, y \in E$.*

Определение 2.17. *Форма $Q \in \mathcal{F}(E)$ называется антисимметричной, если $Q^t = -Q$, то есть $Q(x, y) = -Q(y, x)$ при любых $x, y \in E$.*

Предложение 2.18. *Любую форму $Q \in \mathcal{F}(E)$ можно однозначно представить в виде $Q = Q_s + Q_a$, где Q_s — симметричная форма, а Q_a — антисимметричная форма.*

Доказательство. Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$. Докажем существование нужного представления. Положим

$$Q_s = \frac{1}{2}(Q + Q^t), \quad Q_a = \frac{1}{2}(Q - Q^t). \tag{2.9}$$

Очевидно, выполнены равенства $Q_s^t = Q_s$, $Q_a^t = -Q_a$, $Q = Q_s + Q_a$.

Теперь проверим единственность представления. Пусть $Q = Q_s + Q_a$, где $Q_s^t = Q_s$ и $Q_a^t = -Q_a$. Тогда $Q^t = Q_s^t + Q_a^t = Q_s - Q_a$. Итак,

$$Q = Q_s + Q_a, \quad Q^t = Q_s - Q_a.$$

Складывая эти равенства, получаем $Q_s = \frac{1}{2}(Q + Q^t)$. Вычитая второе равенство из первого, находим $Q_a = \frac{1}{2}(Q - Q^t)$. Мы пришли к прежним формулам (2.9). Это доказывает единственность представления. □

Форму Q_s называют *симметричной частью*, а Q_a — *антисимметричной частью* формы Q.

Из предложения 2.15 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.19. *Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$. Пусть q — изображающая матрица формы Q в некотором базисе* $\mathbf{e}$.

1°. *Форма Q симметрична тогда и только тогда, когда матрица q симметрична.*

2°. *Форма Q антисимметрична тогда и только тогда, когда матрица q антисимметрична.*

Замечание. 1°. Если изображающая матрица q формы Q в базисе $\mathbf{e}$ симметрична, то и изображающая матрица $\widetilde{q}$ формы Q в другом базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$ тоже симметрична.

2°. Если изображающая матрица q формы Q в базисе $\mathbf{e}$ антисимметрична, то и изображающая матрица $\widetilde{q}$ формы Q в другом базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$ тоже антисимметрична.

Эти утверждения следуют из закона преобразования изображающих матриц билинейных форм: $\widetilde{q} = b^t q b$.

2.8. **Квадратичная форма.**

Определение 2.20. *Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$. Квадратичной формой, отвечающей билинейной форме Q, называется отображение $E \to K$, сопоставляющее вектору $x \in E$ число $Q(x,x) \in K$.*

Предложение 2.21. *Для любой антисимметричной формы $Q \in \mathcal{F}(E)$ отвечающая ей квадратичная форма равна нулю: $Q(x,x) = 0$, $x \in E$.*

Доказательство. В силу антисимметричности формы Q имеем $Q(x,y) = -Q(y,x)$ при всех $x, y \in E$. Подставляя $y = x$, получаем $Q(x,x) = -Q(x,x)$, откуда $Q(x,x) = 0$, $x \in E$. □

Предложение 2.22. *По квадратичной форме можно однозначно восстановить симметричную часть билинейной формы $Q \in \mathcal{F}(E)$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in E$. Поскольку симметричная часть Q_s формы Q определена равенством $2Q_s(x,y) = Q(x,y) + Q(y,x)$, то

$$\begin{aligned} Q(x+y, x+y) &= Q(x,x) + Q(y,y) + Q(x,y) + Q(y,x) = \\ &= Q(x,x) + Q(y,y) + 2Q_s(x,y). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$Q_s(x,y) = \frac{1}{2}\Big(Q(x+y, x+y) - Q(x,x) - Q(y,y)\Big), \ x, y \in E. \tag{2.10}$$

Это и есть выражение для $Q_s(x,y)$ через значения квадратичной формы $Q(x,x)$, $Q(y,y)$, $Q(x+y, x+y)$. □

§ 3. Приведение симметричной билинейной формы к простейшему виду

3.1. **Задача о диагонализации изображающей матрицы билинейной формы.** Пусть E — линейное n-мерное пространство над полем K, где $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — некоторый базис в E.

Пусть $Q \in \mathcal{F}(E)$ и $q \in M^n$ — изображающая матрица формы Q в базисе $\mathbf{e}$. Напомним выражение для $Q(x, y)$:

$$Q(x,y) = \sum_{k,l=1}^{n} q_{kl}\xi^k\eta^l, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k, \ y = \sum_{l=1}^{n} \eta^l e_l. \tag{3.1}$$

При переходе к новому базису $\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n\}$ изображающая матрица формы Q преобразуется по закону

$$\widetilde{q} = b^t q b, \tag{3.2}$$

где b — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$.

Определение 3.1. *Говорят, что изображающую матрицу q билинейной формы Q можно диагонализовать, если существует такой базис $\widetilde{\mathbf{e}}$, в котором изображающая матрица $\widetilde{q}$ формы Q диагональна:*

$$\widetilde{q} = \begin{pmatrix} \widetilde{q}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{q}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{q}_n \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря, изображающую матрицу $q \in M^n$ билинейной формы Q можно диагонализовать, если существует диагональная матрица $\widetilde{q} \in M^n$ и неособая матрица $b \in M^n$, такие что выполнено (3.2). При этом в случае комплексного пространства (то есть $K = \mathbb{C}$) матрицы $b, q, \widetilde{q}$ имеют комплексные элементы, а в случае вещественного пространства ($K = \mathbb{R}$) требуется, чтобы $b, q, \widetilde{q}$ имели вещественные элементы.

Замечание 3.2. *Сравнивая данное определение с "обычным" определением диагонализуемой матрицы (см. определение 3.12 из [4]), убеждаемся, что обычная "диагонализуемость" матрицы и "диагонализуемость изображающей матрицы билинейной формы" — это разные понятия. В первом случае для диагонализуемой матрицы a матрица $\widetilde{a} = b^{-1}ab$ является диагональной при подходящей неособой матрице b, а во втором случае для q матрица $\widetilde{q} = b^t qb$ является диагональной при подходящей неособой матрице b. Забегая вперед, скажем, что разными оказываются и критерии диагонализуемости матриц a и q.*

Предложение 3.3. *Для того, чтобы матрицу билинейной формы Q можно было диагонализовать, необходимо, чтобы форма Q была симметричной.*

Доказательство. Нам дано, что существует такой базис $\widetilde{\mathbf{e}}$ в E, в котором изображающая матрица $\widetilde{q}$ формы Q диагональна. Любая диагональная матрица симметрична, а потому $\widetilde{q}^t = \widetilde{q}$. В силу предложения 2.19 отсюда следует, что $Q^t = Q$. □

Ниже мы покажем, что условие симметричности является также и достаточным условием диагонализации изображающей матрицы формы Q (см. теорему 3.5).

Ниже рассматриваем только симметричные билинейные формы. Задача о диагонализации изображающей матрицы билинейной формы Q равносильна *задаче о приведении билинейной формы к простейшему виду* (к "сумме одноименных произведений"):

$$Q(x, y) = \sum_{l=1}^{n} \widetilde{q}_l \widetilde{\xi}^l \widetilde{\eta}^l, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\xi}^k \widetilde{e}_k, \ y = \sum_{l=1}^{n} \widetilde{\eta}^l \widetilde{e}_l. \tag{3.3}$$

Наконец, поскольку симметричная билинейная форма однозначно восстанавливается по своей квадратичной форме, эта задача равносильна *задаче о приведении квадратичной формы к сумме квадратов*:

$$Q(x,x) = \sum_{l=1}^{n} \widetilde{q}_l (\widetilde{\xi}^l)^2, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\xi}^k \widetilde{e}_k. \tag{3.4}$$

Предложение 3.4. *Предположим, что существует базис $\widetilde{\mathbf{e}}$, в котором билинейная форма Q имеет вид* (3.3). *Тогда количество ненулевых коэффициентов $\widetilde{q}_l$ равно рангу формы Q.*

Доказательство. Очевидно, ранг диагональной матрицы $\widetilde{q}$ равен количеству ненулевых диагональных элементов $\widetilde{q}_l$. С другой стороны, ранг формы Q совпадает с рангом ее изображающей матрицы $\widetilde{q}$. □

3.2. **Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Общий случай.** Начнем с рассмотрения примера.

Пример. Пусть E — трехмерное комплексное пространство и $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ — некоторый базис. Пусть задана симметричная билинейная форма Q, изображающая матрица которой в базисе $\mathbf{e}$ есть

$$q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда при $x = \sum_{k=1}^{3} \xi^k e_k$ и $y = \sum_{l=1}^{3} \eta^l e_l$ выполнено

$$Q(x,y) = \xi^1\eta^1 - \frac{1}{2}\xi^1\eta^2 - \frac{1}{2}\xi^2\eta^1 - \frac{1}{2}\xi^2\eta^3 - \frac{1}{2}\xi^3\eta^2;$$

(см. (3.1)). Рассмотрим соответствующую квадратичную форму

$$Q(x,x) = (\xi^1)^2 - \xi^1\xi^2 - \xi^2\xi^3.$$

Выделим полные квадраты:

$$Q(x,x) =$$
$$= (\xi^1)^2 - \xi^1\xi^2 + \frac{1}{4}(\xi^2)^2 - \left(\frac{1}{4}(\xi^2)^2 + \xi^2\xi^3 + (\xi^3)^2\right) + (\xi^3)^2 =$$
$$= \left(\xi^1 - \frac{1}{2}\xi^2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\xi^2 + \xi^3\right)^2 + (\xi^3)^2.$$

Обозначим

$$\widetilde{\xi}^1 = \xi^1 - \frac{1}{2}\xi^2, \quad \widetilde{\xi}^2 = \frac{1}{2}\xi^2 + \xi^3, \quad \widetilde{\xi}^3 = \xi^3.$$

Это координаты вектора x в новом базисе $\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3\}$, то есть $x = \sum_{j=1}^{3} \widetilde{\xi}^j \widetilde{e}_j$.

Мы показали, что в новых координатах квадратичная форма имеет вид суммы квадратов:

$$Q(x,x) = (\widetilde{\xi}^1)^2 - (\widetilde{\xi}^2)^2 + (\widetilde{\xi}^3)^2.$$

Используя связь новых координат с исходными:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\xi}^1 \\ \widetilde{\xi}^2 \\ \widetilde{\xi}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix},$$

найдем матрицу перехода b от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Вспомним контравариантный закон преобразования: $\vec{\widetilde{x}} = b^{-1}\vec{x}$. Следовательно,

$$b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обращая эту матрицу, находим

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вспоминая ковариантный закон преобразования базисов $\widetilde{\vec{\mathbf{e}}} = b^t \vec{\mathbf{e}}$, получаем

$$\widetilde{e}_1 = e_1, \quad \widetilde{e}_2 = e_1 + 2e_2, \quad \widetilde{e}_3 = -e_1 - 2e_2 + e_3.$$

В базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$ изображающая матрица формы Q диагональна и имеет вид:

$$\widetilde{q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица связана с матрицей q соотношением $\widetilde{q} = b^t q b$.

Теперь мы установим следующий фундаментальный результат.

Теорема 3.5. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем K, где $K = \mathbb{C}$ или $K = \mathbb{R}$. Для того чтобы билинейную форму $Q \in \mathcal{F}(E)$ можно было привести к простейшему виду (к сумме одноименных произведений), необходимо и достаточно, чтобы форма Q была симметричной.*

Доказательство. Необходимость уже доказана (см. предложение 3.3).

Достаточность докажем методом *индукции по размерности n.*

База индукции. При $n = 1$ квадратичная форма с самого начала имеет вид "суммы квадратов":

$$Q(x, x) = q_{11}(\xi^1)^2.$$

Предположение индукции. Предположим, что свойство выполняется в размерности $n-1$, то есть в $(n-1)$-мерном пространстве любую симметричную билинейную форму можно привести к простейшему виду. Иначе говоря, любая квадратичная форма вида

$$\sum_{k,l=1}^{n-1} q_{kl} \xi^k \xi^l,$$

где $q_{kl} = q_{lk}$, может быть приведена к сумме квадратов.

Индукционный переход. Покажем, что тогда свойство верно и в размерности n.

Рассмотрим симметричную билинейную форму Q. В исходном базисе $\mathbf{e}$ соответствующая квадратичная форма имеет вид

$$Q(x,x) = \sum_{k,l=1}^{n} q_{kl}\xi^k\xi^l, \quad q_{kl} = q_{lk}.$$

Покажем, что ее можно привести к сумме квадратов.

Случай 1. Пусть хотя бы один диагональный коэффициент отличен от нуля: $q_{jj} \neq 0$. Без ограничения общности (за счет перенумерации базисных векторов) можно считать, что $j = 1$, то есть $q_{11} \neq 0$. Имеем:

$$Q(x,x) = q_{11}(\xi^1)^2 + 2q_{12}\xi^1\xi^2 + \cdots + 2q_{1n}\xi^1\xi^n + F(\xi^2, \ldots, \xi^n),$$

где F — квадратичная форма, зависящая только от координат $\xi^2, \ldots, \xi^n$. Выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} Q(x,x) = \frac{1}{q_{11}}\left((q_{11}\xi^1)^2 + 2q_{11}\xi^1 \cdot q_{12}\xi^2 + \cdots + 2q_{11}\xi^1 \cdot q_{1n}\xi^n\right) \\ + F(\xi^2, \ldots, \xi^n) = \frac{1}{q_{11}}\left(q_{11}\xi^1 + q_{12}\xi^2 + \cdots + q_{1n}\xi^n\right)^2 \\ + \widehat{F}(\xi^2, \ldots, \xi^n). \end{aligned}$$

Здесь $\widehat{F}$ получается из F вычитанием членов вида $\frac{1}{q_{11}}(q_{1k}\xi^k)^2$ $(k = 2, \ldots, n)$ и $2\frac{1}{q_{11}}q_{1k}\xi^k \cdot q_{1j}\xi^j$ $(k \neq j,\ k, j = 2, \ldots, n)$. Очевидно, $\widehat{F}$ — квадратичная форма, зависящая от координат $\xi^2, \ldots, \xi^n$.

Перейдем к новым координатам:

$$\widehat{\xi^1} = q_{11}\xi^1 + q_{12}\xi^2 + \cdots + q_{1n}\xi^n, \quad \widehat{\xi^k} = \xi^k,\ k = 2, \ldots, n.$$

Имеем:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\xi}^1 \\ \widehat{\xi}^2 \\ \vdots \\ \widehat{\xi}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

В соответствии с контравариантным законом преобразования координат $\vec{\widehat{x}} = (\widehat{b})^{-1}\vec{x}$, матрица в правой части — это $(\widehat{b})^{-1}$. Имеем $\det(\widehat{b})^{-1} = q_{11} \neq 0$. Новый базис $\widehat{\mathbf{e}} = \{\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_n\}$ связан с исходным базисом $\mathbf{e}$ матрицей перехода $\widehat{b}$.

Итак, мы показали, что в новом базисе $\widehat{\mathbf{e}}$ квадратичная форма имеет вид

$$Q(x, x) = \frac{1}{q_{11}}(\widehat{\xi}^1)^2 + \widehat{F}(\widehat{\xi}^1, \dots, \widehat{\xi}^n), \quad x = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\xi}^j \widehat{e}_j.$$

Форму $\widehat{F}(\xi^2, \dots, \xi^n) = \widehat{F}(\widehat{\xi}^2, \dots, \widehat{\xi}^n)$ можно интерпретировать как квадратичную форму, отвечающую симметричной билинейной форме $\widehat{F}$ в $(n-1)$-мерном подпространстве $\widehat{E} = \mathcal{L}(\widehat{e}_2, \dots, \widehat{e}_n)$:

$$\widehat{F}(x', x') = \widehat{F}(\widehat{\xi}^2, \dots, \widehat{\xi}^n), \quad x' = \sum_{j=2}^{n} \widehat{\xi}^j \widehat{e}_j \in \widehat{E}.$$

По предположению индукции форму $\widehat{F}(x', x')$ можно привести к сумме квадратов, то есть в подпространстве $\widehat{E}$ найдется такой базис $\{\widetilde{e}_2, \dots, \widetilde{e}_n\}$, в котором

$$\widehat{F}(x', x') = \sum_{l=2}^{n} \widetilde{q}_l (\widetilde{\xi}^l)^2, \quad x' = \sum_{j=2}^{n} \widetilde{\xi}^l \widetilde{e}_l \in \widehat{E}.$$

Окончательно: рассмотрим базис $\{\widehat{e}_1, \widetilde{e}_2, \dots, \widetilde{e}_n\}$ в пространстве E. В этом базисе форма $Q(x, x)$ имеет вид суммы квадратов:

$$Q(x,x)=\frac{1}{q_{11}}(\widehat{\xi}^1)^2+\widetilde{q}_2(\widetilde{\xi}^2)^2+\dots+\widetilde{q}_n(\widetilde{\xi}^n)^2,\quad x=\widehat{\xi}^1\widehat{e}_1+\sum_{j=2}^{n}\widetilde{\xi}^j\widetilde{e}_j.$$

Случай 2. Пусть все диагональные коэффициенты равны нулю: $q_{ll}=0$, $l=1,\dots,n$, но хотя бы один внедиагональный коэффициент отличен от нуля. Без ограничения общности считаем, что $q_{12}=q_{21}\neq 0$.

Перейдем к новым координатам:

$$\check{\xi}^1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^1+\xi^2),\quad \check{\xi}^2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^2-\xi^1),\quad \check{\xi}^k=\xi^k,\ k=3,\dots,n.$$

Имеем:

$$\begin{pmatrix}\check{\xi}^1\\ \check{\xi}^2\\ \vdots\\ \check{\xi}^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\\ \vdots\\ \xi^n\end{pmatrix}.$$

В соответствии с контравариантным законом преобразования координат $\vec{\check{x}}=(\check{b})^{-1}\vec{x}$, матрица в правой части — это $(\check{b})^{-1}$. Имеем $\det(\check{b})^{-1}=1\neq 0$. Новый базис $\check{\mathbf{e}}=\{\check{e}_1,\dots,\check{e}_n\}$ связан с исходным базисом $\mathbf{e}$ матрицей перехода $\check{b}$.

Воспользуемся тождеством

$$2\xi^1\xi^2=\frac{1}{2}(\xi^1+\xi^2)^2-\frac{1}{2}(\xi^2-\xi^1)^2=(\check{\xi}^1)^2-(\check{\xi}^2)^2.$$

Тогда в новом базисе квадратичная форма приобретает вид

$$Q(x,x)=q_{12}(\check{\xi}^1)^2-q_{12}(\check{\xi}^2)^2+\check{Q}(x,x),$$

где квадратичная форма $\check{Q}(x,x)$ не содержит членов с $(\check{\xi}^1)^2$ и $(\check{\xi}^2)^2$. Поскольку $q_{12}\neq 0$, мы свели дело к случаю 1.

Случай 3. Пусть все коэффициенты q_{kl} равны нулю, то есть Q — нулевая форма. Тогда утверждение очевидно — $Q(x,x)$

с самого начала имеет вид суммы квадратов (с нулевыми коэффициентами). $\square$

Замечание. Рассмотрим комплексный случай, то есть E — n-мерное пространство над полем $\mathbb{C}$. В силу предложения 3.4 количество ненулевых коэффициентов в (3.4) равно $r = \operatorname{rank} Q$. За счет перенумерации векторов нового базиса $\widetilde{\mathbf{e}}$ будем считать, что первые r коэффициентов отличны от нуля: $\widetilde{q}_l \neq 0$, $l = 1, \ldots, r$, а остальные равны нулю. Тогда

$$Q(x,x) = \sum_{k=1}^{r} \widetilde{q}_k (\widetilde{\xi}^k)^2 = \sum_{k=1}^{r} (\xi_\circ^k)^2,$$

где $\xi_\circ^k = \sqrt{\widetilde{q}_k}\widetilde{\xi}^k$, $k = 1, \ldots, r$. (Здесь выбор квадратных корней из комплексных чисел $\widetilde{q}_k$ как-либо фиксирован.) Рассмотрим базис $\mathbf{e}_\circ = \{e_{\circ 1}, \ldots, e_{\circ n}\}$, где

$$\begin{aligned} e_{\circ k} &= (\widetilde{q}_k)^{-1/2} \widetilde{e}_k, & k &= 1, \ldots, r; \\ e_{\circ j} &= \widetilde{e}_j, & j &= r+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

В этом базисе изображающая матрица формы Q имеет вид

$$q_\circ^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь на диагонали первые r элементов равны 1, а остальные равны нулю.

Следовательно, *любая симметричная матрица $q \in M^n$ с комплексными элементами ранга r эквивалентна матрице $q_\circ^{(r)}$*. (Подразумевается отношение эквивалентности, введенное в пункте 2.5.) То есть найдется неособая матрица $b \in M^n$, такая что $b^t q b = q_\circ^{(r)}$. Тем самым все симметричные комплексные матрицы из M^n, имеющие одинаковый ранг, эквивалентны друг другу.

Замечание. В вещественном пространстве E для симметричной формы Q ранга r в новом базисе получается представление

$$Q(x,x)=\sum_{k=1}^{r}\widetilde{q}_k(\widetilde{\xi}^k)^2,\quad \widetilde{q}_k\neq 0,\ k=1,\dots,r.$$

Однако переход к координатам $\xi_\circ^k=\sqrt{\widetilde{q}_k}\widetilde{\xi}^k$, вообще говоря, невозможен. Сейчас коэффициенты $\widetilde{q}_k$ — вещественные числа, отличные от нуля. Они могут быть положительными или отрицательными. В случае отрицательного коэффициента $\widetilde{q}_k$ переход к $\xi_\circ^k$ невозможен.

3.3. **Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Вещественный случай.** Следующий результат известен как "закон инерции квадратичных форм".

Теорема 3.6. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Пусть симметричная форма $Q\in\mathcal{F}(E)$ ранга r приведена к сумме квадратов: $Q(x,x)=\sum_{k=1}^{r}q_k(\xi^k)^2$, причем $q_k\neq 0$ при $k=1,\dots,r$. Тогда количество n_+ положительных коэффициентов q_k и количество n_- отрицательных коэффиентов q_k не зависят от способа приведения квадратичной формы к сумме квадратов.*

Доказательство. Пусть $r=\operatorname{rank}Q$ и $n_0=n-r$. Предположим, что в базисе $\mathbf{e}$ квадратичная форма имеет вид суммы квадратов:

$$Q(x,x)=\sum_{k=1}^{r}q_k(\xi^k)^2,\quad x=\sum_{j=1}^{n}\xi^j e_j,\quad q_k\neq 0,\ k=1,\dots,r. \tag{3.5}$$

Количество положительных коэффициентов равно n_+, количество отрицательных коэффициентов равно n_-. Очевидно, $n_++n_-=r$.

Изменим обозначения и перенумеруем (при необходимости) координаты. Положительные коэффици-енты среди набора $q_1, \ldots, q_r$ обозначим q_k^+, $k = 1, \ldots, n_+$, а отрицательные коэффициенты обозначим q_l^-, $l = 1, \ldots, n_-$. Через ξ_+^k, $k = 1, \ldots, n_+$, обозначим координаты, при которых коэффициенты в (3.5) положительны, а через ξ_-^l, $l = 1, \ldots, n_-$, обозначим координаты, при которых коэффициенты отрицательны. Наконец, координаты, при которых коэффициенты равны нулю, обозначим ξ_0^j, $j = 1, \ldots, n_0$. Соответственно изменим и обозначения для базисных векторов:

$$\mathbf{e} = \{e_1^+, \ldots, e_{n_+}^+; e_1^-, \ldots, e_{n_-}^-; e_1^0, \ldots, e_{n_0}^0\}. \tag{3.6}$$

Теперь формулу (3.5) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} Q(x,x) = \sum_{k=1}^{n_+} q_k^+ (\xi_+^k)^2 + \sum_{l=1}^{n_-} q_l^- (\xi_-^l)^2, \\ x = \sum_{k=1}^{n_+} \xi_+^k e_k^+ + \sum_{l=1}^{n_-} \xi_-^l e_l^- + \sum_{j=1}^{n_0} \xi_0^j e_j^0. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Рассмотрим два подпространства

$$\begin{aligned} &E_+ := \mathcal{L}\{e_1^+, \ldots, e_{n_+}^+\}, \quad \dim E_+ = n_+, \\ &F := \mathcal{L}\{e_1^-, \ldots, e_{n_-}^-; e_1^0, \ldots, e_{n_0}^0\}, \quad \dim F = n_- + n_0. \end{aligned}$$

Тогда на подпространстве E_+ квадратичная форма строго положительна:

$$Q(x,x) > 0 \quad \forall x \in E_+,\ x \neq \mathbf{0}. \tag{3.8}$$

На подпространстве F квадратичная форма неположительна:

$$Q(x,x) \leqslant 0 \quad \forall x \in F.$$

Предположим теперь, что та же форма приведена к простейшему виду каким-то другим способом. Это означает, что в некотором базисе $\widetilde{\mathbf{e}}$ форма имеет вид суммы квадратов:

$$Q(x,x)=\sum_{k=1}^{r}\widetilde{q}_k(\widetilde{\xi}^k)^2,\quad x=\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\xi}^j\widetilde{e}_j,\quad \widetilde{q}_k\neq 0,\ k=1,\dots,r. \tag{3.9}$$

Количество положительных коэффициентов равно $\widetilde{n}_+$, количество отрицательных коэффициентов равно $\widetilde{n}_-$. Очевидно, $\widetilde{n}_+ + \widetilde{n}_- = r$.

Требуется доказать, что $\widetilde{n}_+ = n_+$ и $\widetilde{n}_- = n_-$.

Мы изменим обозначения тем же способом, что и в первый раз. Положительные коэффициенты в (3.9) обозначим $\widetilde{q}_k^+$, $k=1,\dots,\widetilde{n}_+$, отрицательные обозначим $\widetilde{q}_l^-$, $l=1,\dots,\widetilde{n}_-$. Соответствующие координаты обозначаем $\widetilde{\xi}_+^k$, $k=1,\dots,\widetilde{n}_+$, и $\widetilde{\xi}_-^l$, $l=1,\dots,\widetilde{n}_-$. Координаты, при которых коэффициенты равны нулю, обозначим $\widetilde{\xi}_0^j$, $j=1,\dots,n_0$. Соответственно изменим и обозначения для базисных векторов:

$$\widetilde{\mathbf{e}}=\{\widetilde{e}_1^+,\dots,\widetilde{e}_{\widetilde{n}_+}^+;\widetilde{e}_1^-,\dots,\widetilde{e}_{\widetilde{n}_-}^-;\widetilde{e}_1^0,\dots,\widetilde{e}_{n_0}^0\}.$$

Теперь формулу (3.9) можно переписать в виде

$$Q(x,x)=\sum_{k=1}^{\widetilde{n}_+}\widetilde{q}_k^+(\widetilde{\xi}_+^k)^2+\sum_{l=1}^{\widetilde{n}_-}\widetilde{q}_l^-(\widetilde{\xi}_-^l)^2,$$

$$x=\sum_{k=1}^{\widetilde{n}_+}\widetilde{\xi}_+^k\widetilde{e}_k^+ +\sum_{l=1}^{\widetilde{n}_-}\widetilde{\xi}_-^l\widetilde{e}_l^- +\sum_{j=1}^{n_0}\widetilde{\xi}_0^j\widetilde{e}_j^0.$$

Рассмотрим два подпространства

$$\widetilde{E}_+ := \mathcal{L}\{\widetilde{e}_1^+,\dots,\widetilde{e}_{\widetilde{n}_+}^+\},\quad \dim\widetilde{E}_+=\widetilde{n}_+,$$
$$\widetilde{F} := \mathcal{L}\{\widetilde{e}_1^-,\dots,\widetilde{e}_{\widetilde{n}_-}^-;\widetilde{e}_1^0,\dots,\widetilde{e}_{n_0}^0\},\quad \dim\widetilde{F}=\widetilde{n}_-+n_0.$$

Тогда на подпространстве $\widetilde{E}_+$ квадратичная форма строго положительна:

$$Q(x,x)>0\quad \forall x\in\widetilde{E}_+,\ x\neq\mathbf{0}.$$

На подпространстве $\widetilde{F}$ квадратичная форма неположительна:

$$Q(x,x) \leqslant 0 \quad \forall x \in \widetilde{F}. \tag{3.10}$$

Рассмотрим теперь линейную сумму подпространств E_+ и $\widetilde{F}$. В силу (3.8) и (3.10) пересечение этих подпространств тривиально: $E_+ \cap \widetilde{F} = \{\mathbf{0}\}$, а потому их линейная сумма является прямой суммой. Имеем:

$$\dim(E_+ \dotplus \widetilde{F}) = n_+ + \widetilde{n}_- + n_0 \leqslant \dim E = n_+ + n_- + n_0.$$

Следовательно, $\widetilde{n}_- \leqslant n_-$.

Аналогично, пересечение подпространств $\widetilde{E}_+$ и F тривиально, а потому их сумма является прямой суммой. Имеем:

$$\dim(\widetilde{E}_+ \dotplus F) = \widetilde{n}_+ + n_- + n_0 \leqslant \dim E = \widetilde{n}_+ + \widetilde{n}_- + n_0.$$

Следовательно, $n_- \leqslant \widetilde{n}_-$.

Таким образом, из доказанных неравенств $\widetilde{n}_- \leqslant n_-$ и $n_- \leqslant \widetilde{n}_-$ следует равенство $\widetilde{n}_- = n_-$. Поскольку $n_+ + n_- = \widetilde{n}_+ + \widetilde{n}_- = r$, получаем $\widetilde{n}_+ = n_+$. $\square$

Определение 3.7. *Пусть в конечномерном вещественном пространстве E симметричная форма Q приведена к простейшему виду. Количество положительных коэффициентов n_+ и количество отрицательных коэффициентов n_- в сумме* (3.5) *называются индексами инерции формы Q.*

Пусть $q \in M^n$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Рассмотрим в n-мерном вещественном пространстве E симметричную форму Q, имеющую изображающую матрицу q в некотором базисе. Индексы инерции формы Q называют *индексами инерции матрицы $q \in M^n$*.

Замечание. Пусть квадратичная форма $Q(x,x)$ в базисе (3.6) имеет вид суммы квадратов (3.7). Тогда

$$Q(x,x) = \sum_{k=1}^{n_+} (\check{\xi}_+^k)^2 - \sum_{l=1}^{n_-} (\check{\xi}_-^l)^2,$$

где $\check{\xi}_+^k = \sqrt{q_k^+}\xi^k$, $k = 1, \ldots, n_+$; $\check{\xi}_-^l = \sqrt{|q_l^-|}\xi_-^l$, $l = 1, \ldots, n_-$. Рассмотрим базис

$$\check{\mathbf{e}} = \{\check{e}_1^+, \ldots, \check{e}_{n_+}^+; \check{e}_1^-, \ldots, \check{e}_{n_-}^-; e_1^0, \ldots, e_{n_0}^0\},$$

где

$$\begin{aligned} \check{e}_k^+ &= (q_k^+)^{-1/2} e_k^+, \qquad & k &= 1, \ldots, n_+; \\ \check{e}_l^- &= |q_l^-|^{-1/2} e_l^-, \qquad & l &= 1, \ldots, n_-. \end{aligned}$$

В этом базисе изображающая матрица формы Q имеет вид

$$\check{q}^{(n_+,n_-)} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь на диагонали первые n_+ элементов равны 1, следующие n_- элементов равны -1, а остальные элементы равны нулю.

Отсюда следует, что *произвольная симметричная матрица $q \in M^n$ (с вещественными элементами) с индексами инерции n_+, n_- эквивалентна матрице $\check{q}^{(n_+,n_-)}$*. (Подразумевается отношение эквивалентности, введенное в пункте 2.5.) То есть найдется неособая матрица $b \in M^n$ с вещественными элементами, такая что $b^t q b = \check{q}^{(n_+,n_-)}$. Тем самым все симметричные вещественные матрицы из M^n, имеющие одинаковые индексы инерции, эквивалентны друг другу.

Список литературы

[1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Линейная алгебра, выпуск* 1. *Матрицы. Определители.* Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 1999. – 41 с.

[2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., Фаддеев М. М., *Линейная алгебра, выпуск* 2. *Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений.* Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 1999. – 49 с.

[3] Суслина Т. А., *Линейная алгебра. II семестр*, *выпуск* 1. Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 76 с.

[4] Суслина Т. А., *Линейная алгебра. II семестр*, *выпуск* 2. Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 35 с.