САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

Т. А. Суслина

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
II СЕМЕСТР
Выпуск 1

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2021 г.

- Рецензенты: д.ф.-м.н. Ф. В. Петров;
  к.ф.-м.н. Н. Н. Сеник.
- Печатается по решению учебно-методической комиссии физического факультета СПбГУ.

Т. А. Суслина.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. II СЕМЕСТР. Выпуск 1. — СПб.: СПбГУ, 2021. – 76 с.

Настоящее пособие содержит теоретический материал по курсу “Высшая алгебра”, который читается во втором семестре студентам первого курса физического факультета СПбГУ. Выпуск 1 содержит главу 1 “Конечномерные линейные пространства”. Пособие может быть полезно преподавателям, ведущим занятия по курсу “Высшая алгебра”, а также студентам, изучающим этот предмет.

Введение

Предлагаемое пособие основано на оригинальном курсе лекций, который первоначально разрабатывался и читался для студентов физического факультета СПбГУ профессором М. Ш. Бирманом (1928–2009). В дальнейшем курс модифицировался и уже в течение многих лет читается автором пособия профессором Т. А. Суслиной.

Линейная алгебра возникла как наука о решении систем линейных алгебраических уравнений. Впоследствии предмет линейной алгебры расширился, и сейчас она в существенном представляет собой теорию линейных операторов в конечномерных линейных пространствах. В первом семестре изучаются классические разделы линейной алгебры: матрицы, определители, системы линейных алгебраических уравнений. Этим разделам посвящены учебно-методические пособия [1,2].

Материал второго семестра более абстрактный. Мы познакомимся с некоторыми алгебраическими структурами, а затем перейдем к систематическому изучению конечномерных линейных пространств, линейных операторов и билинейных форм в этих пространствах. Данный материал излагается в пяти выпусках пособия. Выпуск 1 содержит главу 1 “Конечномерные линейные пространства”.

Для тех студентов, кто хотел бы изучить предмет поглубже, можно рекомендовать дополнительную литературу [3, 4, 5].

Глава 1. Конечномерные линейные пространства

§ 1. Некоторые алгебраические структуры

1.1. **Множества с бинарной операцией.**

Определение 1.1. *Пусть* X *— некоторое множество. Операция, сопоставляющая любой упорядоченной паре элементов* (x, y) *из* X *некоторый элемент* z *из того же множества, называется бинарной операцией.*

Иначе говоря, бинарная операция — это *отображение из* $X \times X$ *в* X. Если паре (x, y) сопоставлен элемент z, будем писать $z = x \circ y$.

Определение 1.2. *Бинарная операция называется коммутативной, если* $x \circ y = y \circ x$ *для любых элементов* $x, y \in X$.

Определение 1.3. *Бинарная операция называется ассоциативной, если* $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ *для любых элементов* $x, y, z \in X$.

Примеры.

- Начнем с примеров числовых множеств:
  $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.
  $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.
  $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
  $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
  На каждом из этих множеств задана операция *сложения*. Это бинарная операция, притом она ассоциативна и коммутативна.
  Также на каждом из этих множеств задана операция *умножения*. Это бинарная операция, она ассоциативна и коммутативна.

- Рассмотрим примеры множеств матриц.
$M^{m,n}$ — множество матриц размера $m \times n$ (m строк и n столбцов). Пусть матрицы имеют вещественные элементы. Операция *сложения* матриц является ассоциативной и коммутативной бинарной операцией.

  Аналогично можно рассмотреть множество матриц размера $m \times n$ с комплексными элементами. Операция сложения снова будет ассоциативной и коммутативной бинарной операцией.

- Рассмотрим множество M^n (квадратных матриц размера $n \times n$) с вещественными элементами. Считаем $n \geqslant 2$. Операция *умножения* матриц является бинарной операцией. Она ассоциативна, но *не коммутативна.*

  Аналогично обстоит дело для множества квадратных матриц с комплексными элементами.

- Приведем пример множества с не ассоциативной бинарной операцией. В курсе аналитической геометрии обсуждалось понятие ориентации в (геометрическом) пространстве и связанное с выбором ориентации понятие *псевдовекторов.* Рассмотрим множество X всех псевдовекторов. Будем сопоставлять упорядоченной паре псевдовекторов $\vec{a}, \vec{b}$ их векторное произведение $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Напомним, что векторное произведение двух псевдовекторов является снова псевдовектором. Поэтому операция векторного умножения является бинарной на множестве X. Она *не ассоциативна* и *не коммутативна.* (Достаточно вспомнить свойства векторного произведения из курса аналитической геометрии.)

- Перейдем к функциональным множествам.

  Обозначим через Ω_n множество полиномов с вещественными коэффициентами степени не превосходящей n. Элемент множества Ω_n — это многочлен (полином) P от вещественной переменной t, имеющий вид

  $$P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n,$$

  где коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_n$ — заданные вещественные числа. Очевидно, операция *сложения* на множестве Ω_n является бинарной, притом она ассоциативна и коммутативна.

  Если же попытаться рассмотреть операцию умножения на множестве Ω_n, то она не будет бинарной. Причина в том, что произведение двух многочленов степени n будет иметь степень $2n$, и мы выйдем за пределы множества Ω_n.

- *Обозначим через Ω множество полиномов с вещественными коэффициентами любой степени.* (Иначе говоря, $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$.) Очевидно, операция *умножения* на множестве Ω является ассоциативной и коммутативной бинарной операцией.

- Рассмотрим интервал $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Обозначим через $C([a, b])$ множество непрерывных функций*

  $$f : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

  Операция *сложения* функций является ассоциативной и коммутативной бинарной операцией на этом множестве. Операция *умножения* функций также является ассоциативной и коммутативной бинарной операцией. Нужно учесть, что сумма и произведение двух непрерывных функций на интервале $[a, b]$ снова непрерывны на $[a, b]$.

- Рассмотрим $\mathcal{P}_n$ — множество всех подстановок порядка n (считаем $n \geqslant 2$). Напомним, что подстановка $\sigma \in \mathcal{P}_n$ — это взаимно-однозначное отображение множества $1, 2, \dots, n$ на себя. (См. §4 в пособии [1].) На множестве $\mathcal{P}_n$ была введена операция *умножения.* (Произведением подстановок τ и σ называется композиция соответствующих отображений.) Вспоминая свойства умножения подстановок, приходим к выводу: операция умножения на множестве $\mathcal{P}_n$ является ассоциативной бинарной операцией. При $n \geqslant 3$ эта операция *не коммутативна*, а при $n = 2$ *коммутативна.*

- Рассмотрим всевозможные векторы на плоскости с началом в фиксированной точке O. Пусть Γ_φ — отображение, которое поворачивает векторы на угол φ вокруг точки O. (Если $\varphi > 0$, то поворот идет против часовой стрелки). Через Γ обозначим множество всех таких отображений. Кратко его называют "множеством поворотов на плоскости". На множестве Γ зададим бинарную операцию — *композицию* отображений (называемую также умножением). Отметим очевидное свойство композиции: $\Gamma_\varphi \circ \Gamma_\psi = \Gamma_{\varphi+\psi}$. Операция композиции отображений ассоциативна и коммутативна.

В большинстве рассмотренных примеров бинарные операции оказывались ассоциативными. Ниже мы будем рассматривать *только ассоциативные бинарные операции.*

Часто ассоциативную бинарную операцию называют *умножением* и пишут $x \circ y = xy$, $(x \circ y) \circ z = xyz$. Это так называемая *мультипликативная терминология.*

Часто ассоциативную и коммутативную бинарную операцию называют *сложением* и пишут $x \circ y = x + y$, $(x \circ y) \circ z = x + y + z$. Это так называемая *аддитивная терминология.* Отметим, что аддитивную терминологию никогда не используют, если операция не коммутативна.

1.2. **Нейтральный элемент.** Пусть X — множество с ассоциативной бинарной операцией.

Определение 1.4. *Элемент $e' \in X$ называется левым нейтральным элементом, если $e' \circ x = x$ для любого $x \in X$.*

Определение 1.5. *Элемент $e'' \in X$ называется правым нейтральным элементом, если $x \circ e'' = x$ для любого $x \in X$.*

Определение 1.6. *Элемент $e \in X$ называется нейтральным элементом, если e одновременно является левым и правым нейтральным элементом, то есть $e \circ x = x \circ e = x$ для любого $x \in X$.*

Предложение 1.7. *Пусть X — множество с ассоциативной бинарной операцией. Пусть в X существует левый нейтральный элемент e' и существует правый нейтральный элемент e''. Тогда $e' = e''$.*

Доказательство. По определению e' имеем $e' \circ x = x$ для любого $x \in X$. Подставляя $x = e''$, получаем $e' \circ e'' = e''$.

Аналогично $x \circ e'' = x$ для любого $x \in X$. Подставляя $x = e'$, получаем $e' \circ e'' = e'$.

Сопоставляя полученные равенства $e' \circ e'' = e''$ и $e' \circ e'' = e'$, заключаем, что $e' = e''$. $\square$

Следствие 1.8. *Пусть X — множество с ассоциативной бинарной операцией.*
1°. *Пусть в X существует левый нейтральный элемент e' и существует правый нейтральный элемент e''. Тогда существует нейтральный элемент $e = e' = e''$ и он единственен.*
2°. *Пусть в X существует нейтральный элемент e. Тогда он единственен.*

Доказательство. В условиях пункта 1° мы знаем, что $e' = e''$ в силу предложения 1.7. Тогда элемент $e = e' = e''$ будет нейтральным.

Единственность нейтрального элемента e проверяется следующим рассуждением. Предположим, что $\widetilde{e} \in X$ тоже является нейтральным элементом. Элемент e, в частности, является левым нейтральным, а элемент $\widetilde{e}$, в частности, является правым нейтральным. Они совпадают в силу предложения 1.7: $e = \widetilde{e}$. □

В мультипликативной терминологии нейтральный элемент называют *единичным элементом* или просто *единицей*. Его обычно обозначают $\mathbf{1}$. Тогда $x\mathbf{1} = \mathbf{1}x = x$.

В аддитивной терминологии нейтральный элемент называют *нулевым элементом* или просто *нулем*. Его обычно обозначают $\mathbf{0}$. Тогда $x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$.

1.3. **Понятие обратного элемента.** Пусть X — множество с ассоциативной бинарной операцией. Пусть в X существует нейтральный элемент e.

Определение 1.9. *Элемент $a \in X$ называется левым обратным к элементу x, если $a \circ x = e$.*

Определение 1.10. *Элемент $b \in X$ называется правым обратным к элементу x, если $x \circ b = e$.*

Определение 1.11. *Элемент $c \in X$ называется обратным к элементу x, если c одновременно является левым и правым обратным к x, то есть, $c \circ x = x \circ c = e$.*

Предложение 1.12. *Пусть X — множество с ассоциативной бинарной операцией, в котором существует нейтральный элемент e. Пусть для элемента $x \in X$ существует левый обратный элемент a и существует правый обратный элемент b. Тогда $a = b$.*

Доказательство. Имеем:

$$a = a \circ e = a \circ (x \circ b) = (a \circ x) \circ b = e \circ b = b.$$

Первое равенство выполнено по определению e, второе — за счет определения правого обратного элемента ($x \circ b = e$).

Третий переход справедлив из-за ассоциативности бинарной операции, четвертый — в силу определения левого обратного ($a \circ x = e$). В последнем равенстве опять использовано определение e. $\square$

Следствие 1.13. *Пусть X — множество с ассоциативной бинарной операцией, в котором существует нейтральный элемент e.*
1°. *Пусть для $x \in X$ существует левый обратный элемент a и существует правый обратный элемент b. Тогда для x существует обратный элемент $c = a = b$ и он единственен.*
2°. *Пусть для $x \in X$ существует обратный элемент c. Тогда он единственен.*

Упражнение. Докажите следствие 1.13 самостоятельно по аналогии с доказательством следствия 1.8.

В мультипликативной терминологии обратный элемент к x обозначают x^{-1}. Имеем: $x^{-1}x = xx^{-1} = e$.

Следующие свойства удобно сформулировать в мультипликативной терминологии.

- Нейтральный элемент обратим и обратный совпадает с ним самим: $e^{-1} = e$, поскольку $e \circ e = e$.
- Если для x существует обратный x^{-1}, то x^{-1} обратим, причем $(x^{-1})^{-1} = x$. Это следует из равенств
$$x^{-1}x = xx^{-1} = e.$$

Предложение 1.14. *Пусть X — множество с ассоциативной бинарной операцией, в котором существует нейтральный элемент e. Пусть для элементов $x, y \in X$ существуют обратные x^{-1}, y^{-1}. Тогда элемент xy обратим и выполнено $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.*

Доказательство. Проверим, что элемент $y^{-1}x^{-1}$ является левым обратным к элементу xy:
$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}(x^{-1}x)y = y^{-1}ey = y^{-1}y = e.$$

Мы воспользовались ассоциативностью операции, определением обратного элемента и определением нейтрального элемента.

По аналогии проверьте, что $y^{-1}x^{-1}$ является также и правым обратным к элементу xy. $\square$

В аддитивной терминологии обратный элемент к x называют *противоположным* элементу x и обозначают $(-x)$. Имеем: $(-x) + x = x + (-x) = \mathbf{0}$.

1.4. **Группы.**

Определение 1.15. *Группой называется множество X с ассоциативной бинарной операцией, в котором существует нейтральный элемент e и любой элемент $x \in X$ имеет обратный.*

Определение 1.16. *Группа X называется абелевой, если бинарная операция коммутативна.*

Предложение 1.17. *Пусть X — множество с ассоциативной бинарной операцией, в котором существует нейтральный элемент e. Пусть Y — множество всех обратимых элементов из X. Тогда Y является группой.*

Доказательство. Если $x, y \in Y$, то существуют элементы x^{-1}, y^{-1}. Тогда в силу предложения 1.14 элемент xy обратим, а значит, $xy \in Y$. Это показывает, что операция не выводит за пределы множества Y, то есть является бинарной на Y.

Нейтральный элемент e принадлежит Y, поскольку e обратим.

Наконец, если $x \in Y$, то существует x^{-1}. Тогда элемент x^{-1} тоже обратим (обратный к нему есть x), а значит, $x^{-1} \in Y$.

Из сказанного вытекает, что Y является группой. $\square$

Предложение 1.17 дает нам способ, как можно выделить группу в случае, когда не все элементы множества X обратимы.

Определение 1.18. *Пусть G — группа. Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой группы G, если H само образует группу с той же операцией.*

Чтобы проверить, что подмножество H группы G является подгруппой, нужно проверить выполнение трех свойств: 1) если $h_1, h_2 \in H$, то $h_1 \circ h_2 \in H$; 2) $e \in H$; 3) если $h \in H$, то $h^{-1} \in H$.

Упражнение. Являются ли свойства 1), 2) и 3) независимыми?

Примеры.

- Рассмотрим множество G из одного элемента, который обозначим e. Зададим операцию умножения правилом $e \cdot e = e$. Тогда G — абелева группа.
- $\mathbb{R}$ с операцией сложения — абелева группа. Нейтральный элемент — число 0.
  $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ также являются абелевыми группами по сложению.
  При этом $\mathbb{Z}$ — подгруппа в группах $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$; $\mathbb{Q}$ — подгруппа в группах $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$; $\mathbb{R}$ — подгруппа в группе $\mathbb{C}$.
- Множество $\mathbb{R}$ с операцией умножения не образует группу. Операция бинарная и ассоциативная, существует нейтральный элемент — число 1, но не каждый элемент обратим. А именно, число 0 не имеет обратного.
  Множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ с операцией умножения — абелева группа. (Этот пример является иллюстрацией применения предложения 1.17.)
  Аналогично, множества $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ с операцией умножения — абелевы группы.
  При этом $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ — подгруппа в группах $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ — подгруппа в группе $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
  Заметим, что $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ не образует группу по умножению. Операция бинарная и ассоциативная, есть нейтральный элемент (число 1 является целым), но обратные

числа к целым (числа вида $1/n$, $n \in \mathbb{Z}$) уже целыми не являются.

- $M^{m,n}$ с операцией сложения — абелева группа. Нейтральный элемент — нулевая матрица (размера $m \times n$).

- Рассмотрим теперь M^n — множество квадратных матриц с комплексными элементами. Считаем $n \geqslant 2$. Бинарная операция умножения ассоциативна, существует нейтральный элемент — единичная матрица (n-го порядка). Однако не каждая квадратная матрица обратима. Поэтому M^n не является группой по умножению. Действуя по рецепту предложения 1.17, мы выделяем группу:
$GL(n) = \{A \in M^n : \det A \neq 0\}$ — группа неособых матриц n-го порядка. Эта группа не является абелевой, поскольку умножение для матриц некоммутативно.
Другие примеры групп матриц:
$SL(n) = \{A \in M^n : \det A = 1\}$;
$U(n)$ — группа унитарных матриц n-го порядка;
$SU(n)$ — группа собственно унитарных матриц n-го порядка (с $\det A = 1$);
$O(n)$ — группа ортогональных матриц n-го порядка;
$SO(n)$ — группа собственно ортогональных матриц n-го порядка (с $\det A = 1$).
Все эти группы — подгруппы группы $GL(n)$.
Напомним, что групповые свойства унитарных и ортогональных матриц проверялись в разделе "Специальные классы квадратных матриц" (см. §9 в пособии [2]).
Здесь легко привести многочисленные примеры подгрупп. Скажем, $SU(n)$ — подгруппа в группах $U(n)$, $SL(n)$, $GL(n)$.
Все перечисленные группы матриц не являются абелевыми. Приведем пример абелевой группы матриц — группа диагональных неособых матриц n-го порядка.

- $\mathcal{P}_n$ — множество подстановок n-го порядка с операцией умножения — это группа. Нейтральный элемент — тождественная подстановка. При $n = 2$ эта группа абелева, а при $n \geqslant 3$ — не абелева.
- Γ — множество поворотов на плоскости с операцией умножения (композиции) — это абелева группа. Нейтральный элемент — это поворот на нулевой угол (т.е., тождественное отображение). Обратный элемент к Γ_φ — это $\Gamma_{-\varphi}$ (т.е., поворот на угол φ в другую сторону).

Подчеркнем еще раз, что группа — не просто множество, а *пара* — множество и заданная на нем бинарная операция (удовлетворяющие свойствам из определения 1.15).

1.5. **Кольца.**

Определение 1.19. *Пусть X — множество с двумя ассоциативными бинарными операциями — сложением и умножением. Множество X называется кольцом, если*
1) *X — абелева группа по сложению*;
2) *операции связаны законом дистрибутивности*:

$$(x + y)z = xz + yz, \quad z(x + y) = zx + zy$$

при любых $x, y, z \in X$.

Определение 1.20. *Если в кольце X вторая операция (умножение) коммутативна, то X называется коммутативным кольцом.*

Поскольку кольцо X является группой по сложению, в X существует нулевой элемент $\mathbf{0}$ и каждый элемент $x \in X$ имеет противоположный элемент $(-x)$.

Предложение 1.21. *В кольце X для любого элемента $x \in X$ выполнено*

$$\mathbf{0}x = x\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Доказательство. По свойству нулевого элемента имеем: $y + \mathbf{0} = y$ для любого $y \in X$. В частности, при $y = \mathbf{0}$ получаем $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{0}x &= \mathbf{0}x + \mathbf{0} = \mathbf{0}x + (\mathbf{0}x + (-\mathbf{0}x)) = (\mathbf{0}x + \mathbf{0}x) + (-\mathbf{0}x) \\ &= (\mathbf{0} + \mathbf{0})x + (-\mathbf{0}x) = \mathbf{0}x + (-\mathbf{0}x) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

В первом равенстве использовано определение нуля, во втором переходе — определение противоположных элементов (их сумма равна нулю). Далее мы учли ассоциативность сложения, а затем дистрибутивность, после чего использовали равенство $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ и снова определение противоположных элементов.

Тем самым равенство $\mathbf{0}x = \mathbf{0}$ проверено. Равенство $x\mathbf{0} = \mathbf{0}$ проверяется аналогично. □

Предложение 1.22. *В кольце X для любых элементов $x, y \in X$ выполнено*

$$(-x)y = -xy.$$

Доказательство. Имеем:

$$(-x)y + xy = ((-x) + x)y = \mathbf{0}y = \mathbf{0}.$$

Мы воспользовались дистрибутивностью, затем определением противоположных элементов и предложением 1.21. □

Для чисел (вещественных или комплексных) хорошо известно свойство: если $xy = 0$, то либо $x = 0$, либо $y = 0$. В произвольном кольце это уже не так. Введем понятие делителей нуля.

Определение 1.23. *Пусть X — кольцо. Элементы $x, y \in X$ называют делителями нуля, если $x \neq \mathbf{0}$, $y \neq \mathbf{0}$, но $xy = \mathbf{0}$.*

Определение 1.24. *Если в кольце X существуют делители нуля, то X называют кольцом с делителями нуля.*

Определение 1.25. *Если в кольце X не существуют делители нуля, то X называют кольцом без делителей нуля.*

В произвольном кольце не обязательно существует единичный элемент (нейтральный элемент по умножению).

Определение 1.26. *Если в кольце X существует нейтральный элемент по умножению (единица), то X называют кольцом с единицей.*

Определение 1.27. *Если в кольце X не существует нейтрального элемента по умножению, то X называют кольцом без единицы.*

Определение 1.28. *Пусть X — кольцо. Подмножество $Y \subset X$ называется подкольцом кольца X, если Y само является кольцом (с теми же операциями).*

Упражнение. Какие свойства нужно проверить, чтобы убедиться, что Y — подкольцо кольца X?

Примеры.

- $X = \{\mathbf{0}\}$ — кольцо из одного элемента $\mathbf{0}$. Операции задаются правилами $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- $\mathbb{R}$ с операциями сложения и умножения — коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля.
  $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ являются также коммутативными кольцами с единицей и без делителей нуля.
  При этом $\mathbb{Z}$ — подкольцо в кольцах $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$; $\mathbb{Q}$ — подкольцо в кольцах $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$; $\mathbb{R}$ — подкольцо в кольце $\mathbb{C}$.
- "Искусственный" пример. Пусть $X = (0, +\infty)$ — множество положительных чисел. В качестве операции "сложения" $\oplus$ возьмем обычное умножение: $x \oplus y := xy$, а операцию "умножения" $\odot$ зададим по правилу: $x \odot y := x^{\ln y}$. Проверьте самостоятельно, что X — коммутативное кольцо.
- Множество квадратных матриц M^n при $n \geqslant 2$ с комплексными элементами с операциями сложения и умножения матриц — это некоммутативное кольцо с единицей и с делителями нуля.

Приведем пример делителей нуля для матриц второго порядка:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Пусть X — множество квадратных матриц класса M^n (при $n \geqslant 2$), у которых последний столбец нулевой. Легко убедиться, что X — это некоммутативное кольцо без единицы (единичная матрица не входит в X) и с делителями нуля.

- Ω — множество полиномов с вещественными коэффициентами любой степени (с операциями сложения и умножения полиномов) — это коммутативное кольцо с единицей (роль единицы играет многочлен $P(t) \equiv 1$) и без делителей нуля.

- $C([a,b])$ — множество непрерывных функций на интервале $[a,b]$ с операциями сложения и умножения функций — это коммутативное кольцо с единицей и с делителями нуля. Легко привести пример двух функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, являющихся делителями нуля. Пусть $a < c < b$,

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & a \leqslant t \leqslant c, \\ t - c, & c < t \leqslant b, \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} c - t, & a \leqslant t \leqslant c, \\ 0, & c < t \leqslant b. \end{cases}$$

Очевидно, $f_1(t)f_2(t) = 0$ при всех $a \leqslant t \leqslant b$, то есть $f_1 f_2 = \mathbf{0}$.

- $C_0(\mathbb{R})$ — множество непрерывных функций $f(t)$ на $\mathbb{R}$, для которых $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0$. Множество $C_0(\mathbb{R})$ с операциями сложения и умножения функций образует коммутативное кольцо без единицы (функция $f(t) \equiv 1$

не стремится к нулю на бесконечности) и с делителями нуля. Приведите пример делителей нуля.

Подчеркнем еще раз, что кольцо — не просто множество, а *тройка* — множество и заданные на нем операции сложения и умножения (удовлетворяющие свойствам из определения 1.19).

1.6. **Поля.**

Определение 1.29. *Полем называется коммутативное кольцо X такое, что множество $X \setminus \{\mathbf{0}\}$ образует группу по умножению.*

Таким образом, в поле X существует нейтральный элемент по умножению e (единица), причем $e \neq \mathbf{0}$, и каждый элемент $x \neq \mathbf{0}$ обратим.

Предложение 1.30. $\mathbf{0}$ *— единственный необратимый элемент поля X.*

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{0}$ обратим, то есть, существует элемент $x \in X$ такой, что $\mathbf{0}x = e$. Но $\mathbf{0}x = \mathbf{0}$ в силу предложения 1.21. Следовательно, $e = \mathbf{0}$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathbf{0}$ необратим.

Единственность следует из определения поля: любой элемент $x \neq \mathbf{0}$ обратим. □

Предложение 1.31. *В поле X нет делителей нуля.*

Доказательство. Докажем методом от противного. Предположим, что существуют делители нуля $x, y \in X$, то есть $x \neq \mathbf{0}$, $y \neq \mathbf{0}$, но $xy = \mathbf{0}$. Поскольку $x \neq \mathbf{0}$, то существует x^{-1}. Имеем:

$$y = ey = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Мы последовательно воспользовались определением единицы, определением обратного элемента ($x^{-1}x = e$), ассоциативностью умножения, равенством $xy = \mathbf{0}$ и предложением

1.21. Полученное равенство $y = \mathbf{0}$ противоречит нашему предположению, что $y \neq \mathbf{0}$. $\square$

Определение 1.32. *Пусть X — поле. Множество $Y \subset X$ называется подполем поля X, если Y само является полем (с теми же операциями).*

Примеры.

- $X = \{\mathbf{0}; \mathbf{1}\}$ — поле из двух элементов (нуля и единицы). Операции задаются правилами

  $$\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{0}+\mathbf{1}=\mathbf{1}+\mathbf{0}=\mathbf{1}, \quad \mathbf{1}+\mathbf{1}=\mathbf{0};$$
  $$\mathbf{0}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{0}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{1}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}.$$

  Легко проверить, что выполнено свойство дистрибутивности. Например,

  $$(\mathbf{1}+\mathbf{1})\cdot\mathbf{1}=\mathbf{0}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{0},$$

  с другой стороны,

  $$\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}+\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}+\mathbf{1}=\mathbf{0}.$$

  Следовательно,

  $$(\mathbf{1}+\mathbf{1})\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}+\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}.$$

  Проверьте сами оставшиеся соотношения дистрибутивности.

  Этот пример не является искусственным, как кажется на первый взгляд. Таким законам подчинена четность целых чисел. Если каждому целому числу сопоставлять его остаток при делении на 2 ($\mathbf{0}$, если число четное, и $\mathbf{1}$, если число нечетное), то при выполнении обычных действий сложения и умножения целых чисел отвечающие им остатки преобразуются по описанным правилам. Например, то, что сумма двух нечетных чисел является четным числом, выражается равенством $\mathbf{1}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$.

Таким образом, поле X можно назвать полем остатков при делении на 2, иначе, "полем вычетов по модулю 2".

- $\mathbb{R}$ с операциями сложения и умножения — поле. $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}$ также являются полями. При этом $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ являются подполями поля $\mathbb{C}$; $\mathbb{Q}$ — подполе поля $\mathbb{R}$.
- $X = \{q+r\sqrt{2} :\ q, r \in \mathbb{Q}\}$ — поле. При проверке следует учесть, что умножение является бинарной операцией на X, поскольку
$$(q_1 + r_1\sqrt{2})(q_2 + r_2\sqrt{2}) = q + r\sqrt{2},$$
где $q = q_1q_2 + 2r_1r_2 \in \mathbb{Q}$, $r = q_1r_2 + q_2r_1 \in \mathbb{Q}$. Любое число $q + r\sqrt{2} \in X \setminus \{0\}$ обратимо, причем
$$(q + r\sqrt{2})^{-1} = \frac{q - r\sqrt{2}}{q^2 - 2r^2} = \hat{q} + \hat{r}\sqrt{2},$$
где
$$\hat{q} = \frac{q}{q^2 - 2r^2} \in \mathbb{Q}, \quad \hat{r} = -\frac{r}{q^2 - 2r^2} \in \mathbb{Q}.$$
Мы учитываем, что знаменатель здесь не обращается в ноль: если $q^2-2r^2 = 0$, то $q = \pm r\sqrt{2}$, при рациональных q и r это означает, что $q = r = 0$, но мы предполагали, что $q + r\sqrt{2} \neq 0$.

1.7. **Изоморфизм.**

Определение 1.33. *Говорят, что между множествами X и Y установлено взаимно-однозначное соответствие (биекция), если каждому элементу из X сопоставлен некоторый элемент из Y, причем различным элементам из X соответствуют различные элементы из Y и любой элемент из Y отвечает некоторому элементу из X.*

Изоморфизм — понятие очень общее. Общая идея такова. Говорят, что множества X и Y (на которых введена какая-то алгебраическая структура) изоморфны, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между X и Y, при котором операции соответствуют друг другу. Введем строгое определение изоморфных групп.

Определение 1.34. *Говорят, что группа H изоморфна группе G, если существует биекция $\varphi : G \to H$ такая, что при отображении φ групповая операция в группе G переходит в групповую операцию в группе H, то есть*

$$\varphi(g_1 \overset{G}{\circ} g_2) = \varphi(g_1) \overset{H}{\circ} \varphi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Само отображение φ называют изоморфизмом.

Замечание. Легко убедиться, что изоморфизм групп — это *отношение эквивалентности* на классе всех групп. То есть выполняются три свойства:

1) G изоморфна G (в качестве φ можно взять тождественное отображение);

2) если группа H изоморфна группе G, то G изоморфна H (если $\varphi : G \to H$ — изоморфизм, то можно взять обратное отображение $\varphi^{-1} : H \to G$);

3) если H изоморфна G, а F изоморфна H, то F изоморфна G (надо рассмотреть композицию изоморфизмов $\varphi : G \to H$ и $\psi : H \to F$).

Предложение 1.35. *Пусть группа H изоморфна группе G и $\varphi : G \to H$ — изоморфизм.*

1) *Пусть e_G — нейтральный элемент в группе G и e_H — нейтральный элемент в группе H. Тогда $\varphi(e_G) = e_H$.*

2) *Если $\varphi(g) = h$, то $\varphi(g^{-1}) = h^{-1}$.*

Доказательство. 1) Обозначим $a = \varphi(e_G) \in H$. Проверим, что a является правым нейтральным элементом группы H.

Для каждого элемента $h \in H$ найдется прообраз $g \in G$, такой что $\varphi(g) = h$. Поскольку $g \circ e_G = g$, то $\varphi(g \circ e_G) = \varphi(g) = h$. С другой стороны, по свойству изоморфизма

$\varphi(g \circ e_G) = \varphi(g) \circ \varphi(e_G) = h \circ a$. Следовательно, $h \circ a = h$ для любого $h \in H$, то есть a — правый нейтральный элемент группы H.

Аналогично можно проверить, что a — левый нейтральный элемент группы H.

2) Пусть $\varphi(g) = h$. Обозначим $b = \varphi(g^{-1})$. Проверим, что b является правым обратным к элементу h. Имеем

$$h \circ b = \varphi(g) \circ \varphi(g^{-1}) = \varphi(g \circ g^{-1}) = \varphi(e_G) = e_H.$$

Мы воспользовались свойством изоморфизма, равенством $g \circ g^{-1} = e_G$ и уже доказанным свойством $\varphi(e_G) = e_H$.

Аналогично проверяется, что b — левый обратный к h. $\square$

Если две группы изоморфны, то установить изоморфизм можно разными способами (вообще говоря), то есть выбор изоморфизма φ неоднозначен. Изоморфные группы могут отличаться природой элементов, типом и названием операций. Но "групповые свойства" у изоморфных групп одинаковы. Например, если одна из изоморфных групп абелева, то и вторая абелева.

Примеры.

- Пусть $G = \mathbb{R}$ — абелева группа по сложению, $H = (0, \infty)$ — абелева группа по умножению. Эти группы изоморфны, в качестве изоморфизма $\varphi : G \to H$ можно выбрать отображение $\varphi(x) = e^x$. Ясно, что отображение $\varphi : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ является взаимно-однозначным и выполнено свойство

  $$\varphi(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \varphi(x)\varphi(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

  В данном примере $e_G = 0$, $e_H = 1$, выполнено $\varphi(0) = e^0 = 1$, $\varphi(-x) = e^{-x} = (\varphi(x))^{-1}$. Эти равенства иллюстрируют предложение 1.34.

- Пусть $G = \Gamma$ — (абелева) группа поворотов на плоскости, $H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичная окружность на комплексной плоскости — абелева группа по умножению. Эти группы изоморфны. В качестве изоморфизма можно выбрать отображение $\varphi : G \to H$, переводящее поворот Γ_α на угол α в число $z = e^{i\alpha} \in H$.

- Пусть $G = \Omega_n$ — множество многочленов степени не выше n — абелева группа по сложению. Пусть $H = \mathbb{R}^{n+1}$ — абелева группа по сложению. Эти группы изоморфны. Естественный изоморфизм $\varphi : G \to H$ сопоставляет многочлену $P(t)$ столбец из его коэффициентов

$$P(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_n t^n \;\mapsto\; \varphi(P) = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

При сложении многочленов их коэффициенты складываются, поэтому выполнено нужное свойство:

$$\varphi(P_1 + P_2) = \varphi(P_1) + \varphi(P_2), \quad P_1, P_2 \in \Omega_n.$$

Аналогично вводится понятие изоморфизма для колец.

Определение 1.36. *Говорят, что кольцо Y изоморфно кольцу X, если существует биекция $\varphi : X \to Y$ такая, что при отображении φ операции в кольце X переходят в операции в кольце Y, то есть*

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \quad \varphi(x_1 x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in X$. Само отображение φ называют изоморфизмом.

Замечание. 1) Легко убедиться, что изоморфизм колец — это *отношение эквивалентности* на классе всех колец. 2) Если кольца X и Y изоморфны, то они автоматически будут изоморфны и как абелевы группы по сложению. 3) Если $\varphi : X \to Y$ — изоморфизм, то $\varphi(\mathbf{0}_X) = \mathbf{0}_Y$ и $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ в силу предложения 1.34.

Если два кольца изоморфны, то их свойства как колец одинаковы. Например, если одно кольцо коммутативно, то и другое тоже коммутативно. Если одно — кольцо с единицей, то и в другом есть единица. Если в одном кольце есть делители нуля, то и в другом есть делители нуля.

Примеры.

- Пусть $X = (0, +\infty)$ — кольцо, в котором операции $\oplus$ и $\odot$ заданы по правилам $x \oplus y := xy$, $x \odot y := x^{\ln y}$. Пусть $Y = \mathbb{R}$ — кольцо вещественных чисел (с обычными операциями сложения и умножения). Проверьте, что отображение $\varphi : X \to Y$, определенное формулой $\varphi(x) = \ln x$, задает изоморфизм этих колец.
- Пусть $X = \Omega$ — кольцо многочленов любой степени. Это коммутативное кольцо с единицей.

  Пусть Y — кольцо финитных последовательностей. Элементами Y являются последовательности вещественных чисел вида

  $$c = (c_0, c_1, \dots, c_n, 0, 0, \dots),$$

  то есть, все элементы последовательности c равны нулю, начиная с некоторого номера ($c_j = 0$ при $j > n$). Номер n для каждой последовательности свой. Действие сложения задано естественным образом:

  $$(c + d)_j = c_j + d_j, \quad j = 0, 1, \dots$$

  Действие умножения задано как свертка:

  $$(c * d)_j = \sum_{l=0}^{j} c_l d_{j-l} = c_0 d_j + c_1 d_{j-1} + \dots + c_{j-1} d_1 + c_j d_0.$$

  Проверьте, что Y образует коммутативное кольцо с единицей. Роль единицы играет $e = (1, 0, 0, \dots)$

Кольца X и Y изоморфны. В качестве изоморфизма естественно выбрать отображение $\varphi : X \to Y$, сопоставляющее многочлену $P(t)$ финитную последовательность его коэффициентов:

$$P(t) = p_0 + p_1 t + \cdots + p_n t^n \ \mapsto \ \varphi(P) = (p_0, p_1, \ldots, p_n, 0, 0, \ldots).$$

Проверьте, что выполнены свойства

$$\varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q), \quad \varphi(PQ) = \varphi(P) * \varphi(Q), \quad P, Q \in \Omega.$$

§ 2. Конечномерные линейные пространства. Базисы. Размерность

2.1. **Определение линейного пространства.** Пусть K — некоторое поле. Будем называть элементы поля K "числами". Введем понятие линейного пространства E над полем K. Элементы из E будем называть "векторами". Синонимом термина "линейное пространство" является "векторное пространство". Часто мы будем говорить просто "пространство".

Определение 2.1. *Пусть на множестве E задана коммутативная и ассоциативная бинарная операция — сложение. Множество E называется линейным пространством над полем K, если выполнено следующее.*

I. *E — абелева группа по сложению.*

II. *Задана (не бинарная) операция $K \times E \to E$, называемая умножением вектора на число: паре (α, x), где $\alpha \in K$, $x \in E$, сопоставляется вектор $y = \alpha x \in E$. При этом справедливы свойства (аксиомы):*

1) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall x \in E$;

2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha \in K, \ \forall x, y \in E$;

3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall x \in E$;

4) $1 \cdot x = x \quad \forall x \in E$, *где* $1 \in K$ *— единица в поле* K.

Поскольку линейное пространство E — группа по сложению, в E существует нейтральный элемент по сложению —

нулевой вектор $\mathbf{0}$. У каждого вектора $x \in E$ есть противоположный вектор $(-x) \in E$, так что $x + (-x) = \mathbf{0}$. Через $0 \in K$ будем обозначать нейтральный элемент по сложению в поле K (число ноль), через $1 \in K$ — нейтральный элемент по умножению в поле K (единицу).

Следствия аксиом: выполнены следующие соотношения

1) $0 \cdot x = \mathbf{0}$ при любом $x \in E$;
2) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ при любом $\alpha \in K$;
3) $(-1) \cdot x = -x$ при любом $x \in E$.

Доказательство. 1) Имеем:

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= 0 \cdot x + \mathbf{0} = 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x)) \\ &= (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x) = (0 + 0) \cdot x + (-0 \cdot x) \\ &= 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

В первом переходе использовано определение нулевого вектора, затем — определение противоположных элементов, в третьем переходе использована ассоциативность сложения, затем аксиома 1. В пятом переходе мы учли равенство $0 + 0 = 0$ в поле K и опять определение противоположных элементов.

2) Имеем:

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha(0 \cdot \mathbf{0}) = (\alpha \cdot 0) \cdot \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Мы учли уже доказанное первое свойство при $x = \mathbf{0}$ (равенство $0 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$). Во втором переходе использована аксиома 3. Затем применяется свойство $\alpha \cdot 0 = 0$ в поле K (это свойство справедливо в любом кольце, в частности в поле). Наконец, снова применяется уже доказанное первое свойство при $x = \mathbf{0}$.

3) Проверим, что $x + (-1) \cdot x = \mathbf{0}$. Имеем:

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = \mathbf{0}.$$

Сначала использована аксиома 4, затем аксиома 1. В третьем переходе использовано определение противоположных элементов в поле K (равенство $1 + (-1) = 0$). Наконец, в последнем переходе применяется уже доказанное первое свойство. $\square$

Примеры.

- Рассмотрим пространство $E = K^n$ над полем K, состоящее из n-мерных векторов (с координатами из поля K). Линейные действия — сложение и умножение на число вводятся покомпонентно. Пусть

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} \in K^n, \quad \alpha \in K.$$

  По определению,

$$\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} \xi^1 + \eta^1 \\ \xi^2 + \eta^2 \\ \vdots \\ \xi^n + \eta^n \end{pmatrix}, \quad \alpha\vec{x} := \begin{pmatrix} \alpha\xi^1 \\ \alpha\xi^2 \\ \vdots \\ \alpha\xi^n \end{pmatrix}.$$

  Частные случаи — пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{Q}^n$.
- Можно рассмотреть пространство $E = \mathbb{C}^n$ как пространство над полем $\mathbb{R}$. Сложение задается как прежде, а умножение — только на вещественные числа.
- Множество $E = M^{m,n}$ матриц размера $m \times n$ с вещественными элементами (с обычными действиями сложения матриц и умножения матриц на вещественные числа) образует линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.
- Множество $E = \Omega_n$ многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами образует линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.
- Множество $E = \Omega$ многочленов любой степени с вещественными коэффициентами образует линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

- Множество $E = C([a, b])$ непрерывных функций с вещественными значениями на отрезке $[a, b]$ образует линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.
- Множество $E = C_0(\mathbb{R})$ непрерывных функций $f(t)$ на оси с вещественными значениями, стремящихся к нулю при $|t| \to \infty$, образует линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

2.2. **Изоморфизм линейных пространств.**

Определение 2.2. *Пусть E_1, E_2 — линейные пространства над полем K. Говорят, что пространство E_2 изоморфно пространству E_1, если существует взаимно-однозначное отображение $J : E_1 \to E_2$ такое, что*

$$J(x_1 + x_2) = Jx_1 + Jx_2 \quad \forall x_1, x_2 \in E_1;$$
$$J(\alpha x) = \alpha Jx \quad \forall x \in E, \quad \forall \alpha \in K.$$

Само отображение J называют изоморфизмом.

Проверьте самостоятельно, что изоморфизм — это отношение эквивалентности на классе всех линейных пространств над данным полем K.

Замечание. Если пространства E_1 и E_2 изоморфны, то автоматически они изоморфны и как группы по сложению. Пусть $J : E_1 \to E_2$ — изоморфизм. Тогда $J\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$ и $J(-x) = -Jx$ при любом $x \in E_1$. Здесь $\mathbf{0}_1$ — ноль в E_1, $\mathbf{0}_2$ — ноль в E_2. Достаточно сослаться на предложение 1.35.

Примеры.

- Пространство Ω_n многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами изоморфно пространству $\mathbb{R}^{n+1}$. Проверьте, что отображение $J : \Omega_n \to \mathbb{R}^{n+1}$, переводящее многочлен $P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n$ в вектор

$$JP = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

является изоморфизмом.

- Пространство $E = \mathbb{C}^n$, рассматриваемое как пространство над полем $\mathbb{R}$, изоморфно $\mathbb{R}^{2n}$. Очевидно, отображение $J : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, определенное по правилу

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \ \mapsto \ J\vec{z} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

является изоморфизмом. Здесь $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.

- Пространство $E = M^{m,n}$ матриц размера $m \times n$ с вещественными элементами изоморфно $\mathbb{R}^{mn}$. Очевидно, отображение $J : M^{m,n} \to \mathbb{R}^{mn}$, переводящее матрицу

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in M^{m,n}$$

в вектор

$$Ja = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn},$$

является изоморфизмом.

2.3. **Линейная зависимость и линейная независимость.**

Определение 2.3. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Набор векторов $x_1, \dots x_p \in E$ называется* *линейно зависимым, если найдутся числа* $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in K$, *хотя бы одно из которых не равно нулю, такие что*

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j = \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

Определение 2.4. *Пусть* E *— линейное пространство над полем* K. *Набор векторов* $x_1, \dots x_p \in E$ *называется линейно независимым, если он не является линейно зависимым.*

Иначе говоря, набор $x_1, \dots x_p \in E$ линейно независим, если равенство (2.1) выполнено только при $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, p$.

Проверьте самостоятельно следующие простые свойства:

1) Если набор содержит $\mathbf{0}$, то этот набор линейно зависим.

2) Если набор линейно зависим, то любой расширенный набор также линейно зависим.

3) Если набор линейно независим, то любой меньший набор также линейно независим.

Предложение 2.5. *Пусть пространство* E_2 *изоморфно пространству* E_1 *и* $J : E_1 \to E_2$ *— изоморфизм.*
1) *Если* $\{x_1, \dots, x_p\}$ *— линейно зависимый набор в* E_1, *то* $\{y_1, \dots, y_p\}$ *— линейно зависимый набор в* E_2, *где* $y_k = Jx_k$, $k = 1, \dots, p$.
2) *Если* $\{x_1, \dots, x_p\}$ *— линейно независимый набор в* E_1, *то* $\{y_1, \dots, y_p\}$ *— линейно независимый набор в* E_2.

Доказательство. 1) Дано: найдутся числа $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in K$, хотя бы одно из которых не равно нулю, такие что

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k = \mathbf{0}_1.$$

Поскольку

$$J\Big(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k\Big) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_k,$$

то
$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_k = \mathbf{0}_2.$$
Это означает, что набор $\{y_1, \ldots, y_p\}$ линейно зависим.

2) Предположим, что
$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_k = \mathbf{0}_2.$$
Требуется доказать, что все коэффициенты равны нулю. Поскольку
$$J^{-1}\Bigl(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_k\Bigr) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k,$$
то
$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k = \mathbf{0}_1.$$
Нам дано, что набор $\{x_1, \ldots, x_p\}$ линейно независим. Следовательно, $\alpha_k = 0$, $k = 1, \ldots, p$. □

Пример.

Пусть $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим набор векторов
$$\vec{x}_j = \begin{pmatrix} \xi_j^1 \\ \xi_j^2 \\ \vdots \\ \xi_j^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \ldots, p.$$
Составим матрицу
$$X = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \ldots & \xi_p^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_p^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots & \xi_p^n \end{pmatrix} \in M^{n,p}.$$
По определению ранга по столбцам, ранг $r(X)$ равен максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы X. Выводы:

1) Если $r(X) = p$, то набор $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ линейно независим.

2) Если $r(X) < p$, то набор $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ линейно зависим. В частности, если $p > n$, то набор $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ заведомо линейно зависим.

3) Отдельно обсудим случай $p = n$. Если $\det X \neq 0$, то набор $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ линейно независим. Если $\det X = 0$, то набор $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ линейно зависим.

Замечание. В первом семестре мы изучали матрицы с вещественными или комплексными элементами. Точно также можно рассматривать матрицы с элементами из произвольного поля K. Понятие определителей и их свойства, понятие ранга, теорема о ранге переносятся на матрицы с элементами из поля K. Доказательства не меняются. Поэтому рассмотренный только что пример можно распространить и на систему векторов в пространстве K^n.

Предложение 2.6. *Пространства K^n и K^m при $n \neq m$ не изоморфны.*

Доказательство. Пусть $n > m$. В K^n рассмотрим набор из n линейно независимых векторов, например, набор стандартных ортов

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in K^n.$$

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что пространство K^m изоморфно пространству K^n и $J : K^n \to K^m$ — изоморфизм. Обозначим $\vec{y}_k = J\vec{e}_k$, $k = 1, \dots, n$. В силу предложения 2.5 набор $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ линейно независим в K^m. Но это противоречит следствию из теоремы о ранге: если $n > m$, то в K^m любой набор из n векторов линейно зависим. $\square$

2.4. Базисы. Координаты.

Определение 2.7. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Набор векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (где $e_j \in E$) называется базисом в E, если*
1) набор $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно независим;
2) для любого $x \in E$ набор $\{e_1, e_2, \dots, e_n, x\}$ линейно зависим.

Говоря кратко, *базис — это максимальный линейно независимый набор векторов в E.*

Разумеется, из определения не следует, что во всяком линейном пространстве существует базис. В следующем пункте мы приведем примеры так называемых бесконечномерных пространств, в которых не существует *конечного* базиса.

Предложение 2.8. *Пусть E_1, E_2 — изоморфные линейные пространства над полем K. Пусть $J : E_1 \to E_2$ — изоморфизм. Пусть в E_1 существует базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Обозначим $\widetilde{e}_j := Je_j$, $j = 1, \dots, n$. Тогда набор $\{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n\}$ является базисом в пространстве E_2.*

Докажите это утверждение самостоятельно, используя предложение 2.5.

Предложение 2.9. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Пусть в E существует базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда для любого вектора $x \in E$ существует единственный набор чисел $\xi^j \in K$, $j = 1, \dots, n$, такой что*

$$x = \xi^1 e_1 + \dots + \xi^n e_n. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $x \in E$. Докажем существование чисел $\xi^1, \dots, \xi^n$ таких, что верно (2.2). По определению базиса набор $\{e_1, \dots, e_n, x\}$ линейно зависим. Это означает, что найдутся числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha \in K$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, такие что

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha x = \mathbf{0}. \tag{2.3}$$

Заведомо $\alpha \neq 0$. (Если бы было $\alpha = 0$, то хотя бы один коэффициент $\alpha_j \neq 0$, и получилось бы, что набор $\{e_1, \dots, e_n\}$ линейно зависим.) Поделим (2.3) на α и придем к равенству

$$x = -\alpha^{-1}\alpha_1 e_1 - \dots - \alpha^{-1}\alpha_n e_n.$$

Этим доказано (2.2) при $\xi^j = -\alpha^{-1}\alpha_j$, $j = 1, \dots, n$.

Перейдем к доказательству единственности представления (2.2). Предположим, что x можно представить еще в виде

$$x = \eta^1 e_1 + \dots + \eta^n e_n.$$

Тогда $\xi^1 e_1 + \dots + \xi^n e_n = \eta^1 e_1 + \dots + \eta^n e_n$. Следовательно,

$$(\xi^1 - \eta^1)e_1 + \dots + (\xi^n - \eta^n)e_n = \mathbf{0}.$$

Поскольку набор $\{e_1, \dots, e_n\}$ линейно независим, отсюда следует, что все коэффициенты равны нулю: $\xi^j - \eta^j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Таким образом, $\eta^j = \xi^j$, $j = 1, \dots, n$. $\square$

Определение 2.10. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Пусть в E существует базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Пусть $x \in E$. Числа $\xi^1, \dots, \xi^n$, такие что выполнено (2.2), называются координатами вектора x в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$.*

Теорема 2.11. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Пусть в E существует базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда пространство E изоморфно пространству K^n.*

Доказательство. Построим отображение $J : E \to K^n$ по следующему правилу: J переводит вектор $x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k$ в вектор

$$Jx = \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in K^n.$$

В силу предложения 2.9 это отображение взаимно-однозначное.

Проверим, что $J(x+y) = Jx + Jy$ и $J(\alpha x) = \alpha Jx$ при любых $x, y \in E$, $\alpha \in K$. Пусть $y = \sum_{k=1}^{n} \eta^k e_k$. Тогда

$$Jy = \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} \in K^n.$$

В силу аксиом в пространстве E имеем:

$$x + y = \sum_{k=1}^{n} (\xi^k + \eta^k) e_k,$$

а потому

$$J(x+y) = \begin{pmatrix} \xi^1 + \eta^1 \\ \xi^2 + \eta^2 \\ \vdots \\ \xi^n + \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = Jx + Jy.$$

Аналогично, $\alpha x = \sum_{k=1}^{n} (\alpha \xi^k) e_k$, поэтому

$$J(\alpha x) = \begin{pmatrix} \alpha\xi^1 \\ \alpha\xi^2 \\ \vdots \\ \alpha\xi^n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \alpha Jx. \qquad \square$$

2.5. **Размерность линейного пространства.** Пусть в пространстве E существует базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Число n называют *длиной базиса.*

Теорема 2.12. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Пусть в пространстве E существует базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ и существует базис $\{f_1, \dots, f_m\}$. Тогда $m = n$. Иначе говоря, все базисы в E имеют одинаковую длину.*

Доказательство. Поскольку в пространстве E существует базис $\{e_1, \dots, e_n\}$, по теореме 2.11 пространство E изоморфно K^n. С другой стороны, в E существует базис $\{f_1, \dots, f_m\}$.

Тогда по той же теореме E изоморфно K^m. В силу транзитивности изоморфизма получаем, что K^m и K^n изоморфны. Отсюда следует, что $m = n$ (см. предложение 2.6). $\square$

Определение 2.13. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Если в E существует базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ либо $E = \{\mathbf{0}\}$, то E называют конечномерным линейным пространством. В первом случае длину базиса (число n) называют размерностью пространства E. В случае $E = \{\mathbf{0}\}$ размерность равна нулю по определению.*

Иными словами, *размерность пространства — это максимальное число линейно независимых элементов в этом пространстве.* Для размерности используем обозначение

$$\dim E = n.$$

Определение 2.14. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Если в E существуют сколь угодно длинные линейно независимые наборы, то E называют бесконечномерным линейным пространством. По определению, размерность такого пространства принимается равной бесконечности.*

Замечание 2.15. *С помощью аксиомы выбора можно показать, что в любом линейном пространстве E существует, вообще говоря бесконечный, базис (его еще называют базисом Гамеля), т.е. такой линейно независимый набор, что любой вектор из E представляется в виде конечной линейной комбинации векторов этого набора, см.* [6, §2, п. 20]. *Изучение бесконечномерных пространств и связанных с ними объектов — предмет функционального анализа. Заинтересованный читатель может найти подробности в книге* [7].

Примеры.

- Пространство $E = M^{m,n}$ матриц размера $m \times n$ с вещественными элементами конечномерно. Рассмотрим "матричные единицы" e_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$: в матрице e_{ij} элемент в i-ой строке и j-ом столбце равен 1, а остальные элементы равны нулю. Проверьте, что набор $\{e_{ij}\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, образует базис. Тогда $\dim E = mn$.

- Пространство Ω_n многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами. "Стандартный" базис в Ω_n образуют многочлены $e_0, e_1, \dots, e_n$, где

$$e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2, \ \dots, \ e_n(t) = t^n.$$

  Тогда $\dim \Omega_n = n + 1$.
- Пространство Ω многочленов любой степени с вещественными коэффициентами бесконечномерно, поскольку для любого n набор многочленов $1, t, \dots, t^n$ линейно независим.
- Пространство $C([0,1])$ равномерно непрерывных функций на интервале $[0,1]$ бесконечномерно. (Достаточно заметить, что это пространство содержит многочлены любой степени.)

Теорема 2.16. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем K, $\dim E = n \geqslant 1$. Тогда справедливо следующее:*

1) *любой набор из $(n+1)$-го вектора в E линейно зависим;*

2) *если набор из n векторов в E линейно независим, то он образует базис в E;*

3) *если набор из $p < n$ векторов в E линейно независим, то его можно дополнить до базиса в E.*

Доказательство. 1) В силу теоремы 2.11 пространство E изоморфно K^n. В K^n любой набор из $(n+1)$-го вектора линейно зависим. Тогда согласно предложению 2.5 то же верно в пространстве E.

2) Пусть набор $\{e_1, \dots, e_n\}$ линейно независим. Для любого $x \in E$ набор $\{e_1, \dots, e_n, x\}$ линейно зависим в силу уже доказанного утверждения 1. Тогда $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в E (по определению базиса).

3) Пусть $y_1, \dots, y_p$ — линейно независимый набор, причем $p < n$. Тогда существует вектор y_{p+1} такой, что набор $y_1, \dots, y_p, y_{p+1}$ линейно независим. Иначе набор $\{y_1, \dots, y_p\}$ был бы базисом, что невозможно из-за условия $p < n$. Если $p+1 = n$, то базис $\{y_1, \dots, y_p, y_{p+1}\}$ построен. Если $p+1 < n$, продолжаем процесс. В итоге за $n-p$ шагов мы достроим набор $y_1, \dots, y_p$ до базиса в E. $\square$

Предложение 2.17. *Пусть E_1, E_2 — конечномерные линейные пространства над полем K. Пространства E_1 и E_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim E_1 = \dim E_2$.*

Доказательство. Обозначим $\dim E_1 = n$, $\dim E_2 = m$. В силу теоремы 2.11 пространство E_1 изоморфно K^n, а пространство E_2 изоморфно K^m.

Необходимость. Дано: E_1 и E_2 изоморфны. В силу транзитивности изоморфизма пространства K^n и K^m изоморфны. Следовательно, $n = m$.

Достаточность. Дано: $m = n$. Тогда E_1 изоморфно K^n и E_2 также изоморфно K^n. В силу транзитивности изоморфизма пространства E_1 и E_2 изоморфны. $\square$

Упражнение. Пусть $\dim E_1 = \dim E_2 = n$. Можно описать все изоморфизмы $J : E_1 \to E_2$. Фиксируем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в E_1. Пусть $\{f_1, \dots, f_n\}$ — некоторый базис в E_2. Рассмотрим линейное отображение $J : E_1 \to E_2$, определенное по правилу $Je_k = f_k$, $k = 1, \dots, n$. Тогда J переводит вектор $x = \sum_{k=1}^n \xi^k e_k$ в вектор $Jx = \sum_{k=1}^n \xi^k f_k$. Убедитесь, что отображение J — изоморфизм. Покажите, что, перебирая всевозможные базисы $\{f_1, \dots, f_n\}$ в E_2, мы переберем всевозможные изоморфизмы J.

§ 3. Подпространства. Линейные суммы

3.1. **Определение подпространств. Примеры.**

Определение 3.1. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Множество $F \subset E$ называется подпространством пространства E, если F само является линейным пространством (над тем же полем и с теми же операциями).*

Чтобы проверить, что непустое множество $F \subset E$ является подпространством, достаточно проверить замкнутость множества F относительно сложения и умножения на число, то есть проверить, что

$$f_1, f_2 \in F \;\Rightarrow\; f_1 + f_2 \in F;$$
$$f \in F,\ \alpha \in K \;\Rightarrow\; \alpha f \in F.$$

Отсюда автоматически следует, что $\mathbf{0} \in F$ и $-f \in F$, если $f \in F$. Оба свойства следуют из замкнутости F относительно умножения на число, поскольку $\mathbf{0} = 0 \cdot f$ для любого элемента $f \in F$ и $-f = (-1) \cdot f$.

Отметим следующие свойства подпространства F пространства E:

1) Если $f_j \in F$, $\alpha_j \in K$, $j = 1, \ldots, p$, то $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j \in F$.

2) $\dim F \leqslant \dim E$.

Действительно, если $f_1, \ldots, f_p$ — линейно независимый набор в F, то он одновременно является и линейно независимым набором в E. Значит, максимальная длина линейно независимого набора в F не превосходит максимальной длины линейно независимого набора в E.

В любом пространстве E можно рассмотреть подпространство $F_0 = \{\mathbf{0}\}$, состоящее из одного нулевого вектора, и подпространство $F = E$, совпадающее со всем пространством E.

Определение 3.2. *Подпространства $\{\mathbf{0}\}$ и E называются несобственными подпространствами пространства E.*

Определение 3.3. *Подпространство F называется собственным подпространством пространства E, если F не совпадает с $\{\mathbf{0}\}$ и с E.*

Предложение 3.4. *Пусть E — конечномерное линейное пространство над полем K. Пусть F — собственное подпространство пространства E. Тогда*

$$0 < \dim F < \dim E.$$

Доказательство. 1) Поскольку F — собственное подпространство пространства E, то найдется элемент $f \in F$, $f \neq \mathbf{0}$. Набор из одного элемента f является линейно независимым. Следовательно, $\dim F \geqslant 1$.

2) Мы знаем, что $\dim F \leqslant \dim E$. Предположим, что $\dim F = \dim E = n$. Тогда в F существует базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Этот набор линейно независим в E и в силу теоремы 2.16 он является базисом в E. Отсюда следует, что любой вектор $x \in E$ можно представить как линейную комбинацию векторов $f_1, \ldots, f_n$ из F, а потому $x \in F$. Следовательно, $F = E$. Это противоречит предположению о том, что F — собственное подпространство пространства E.

Таким образом, мы показали, что $\dim F < \dim E$. □

Примеры.

- В пространстве $E = K^n$ рассмотрим подпространство F, состоящее из векторов вида

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\dim F = n - 1$.

- В пространстве $E = K^n$ рассмотрим подпространство F, состоящее из векторов вида

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix},$$

для которых $\xi^1 + \cdots + \xi^n = 0$. Проверьте, что F является подпространством и $\dim F = n - 1$. Найдите какой-либо базис в F.

- В пространстве $E = \Omega_n$ рассмотрим подпространства

$$F_1 = \{P \in \Omega_n :\ P(1) = 0\},$$

$$F_2 = \{P \in \Omega_n :\ P(1) = 0,\ P'(1) = 0\}.$$

Найдите какие-либо базисы в F_1 и F_2 и определите размерности этих подпространств.

- В пространстве $E = M^n$ матриц с вещественными элементами рассмотрим подпространство F, состоящее из симметричных матриц. Найдите какой-либо базис и определите размерность подпространства F.

3.2. **Линейная оболочка множества.**

Определение 3.5. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Пусть $M \subset E$ — некоторое подмножество. Линейной оболочкой множества M называется подпространство $F =: \mathcal{L}(M)$ пространства E такое, что $M \subset F$ и F — наименьшее из всех подпространств, содержащих M. То есть, если $\widetilde{F}$ — подпространство пространства E и $M \subset \widetilde{F}$, то $F \subset \widetilde{F}$.*

Предложение 3.6. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Пусть $M \subset E$ — некоторое подмножество. Тогда линейная оболочка множества M совпадает с множеством всех конечных линейных комбинаций элементов* *из* M:

$$\mathcal{L}(M) =$$

$$= \Big\{ f = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k;\ \alpha_k \in K,\ f_k \in M,\ k = 1, \ldots, p;\ p \in \mathbb{N} \Big\}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим правую часть (3.1) через F. Проверим, что F замкнуто относительно сложения и умножения на число. Пусть $f, g \in F$, то есть, справедливы представления $f = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k$ и $g = \sum_{j=1}^{q} \beta_j g_j$, где $f_k \in M$, $\alpha_k \in K$ $(k = 1, \ldots, p)$, $g_j \in M$, $\beta_j \in K$ $(j = 1, \ldots, q)$. Пусть $\gamma \in K$. Тогда $f + g$ и γf также являются конечными линейными комбинациями элементов из M:

$$f + g = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_p f_p + \beta_1 g_1 + \cdots + \beta_q g_q \in F,$$

$$\gamma f = (\gamma \alpha_1) f_1 + \cdots + (\gamma \alpha_p) f_p \in F.$$

Следовательно, F — подпространство пространства E.

Пусть $\widetilde{F}$ — подпространство пространства E, содержащее множество M. Тогда $\widetilde{F}$ обязано содержать все конечные линейные комбинации элементов из M, то есть $F \subset \widetilde{F}$.

Мы убедились, что F является наименьшим подпространством, содержащим в себе M. Следовательно, линейная оболочка множества M совпадает с F. □

Примеры.

- В пространстве $E = \mathbb{R}^3$ рассмотрим множество M, состоящее из двух векторов:

$$M = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}, \quad \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathcal{L}(M)$ — это плоскость вида

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ \vec{f} = \alpha \vec{f_1} + \beta \vec{f_2} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

- В пространстве $E = C([0,1])$ рассмотрим множество M, состоящее из счетного числа функций $f_k(t) = t^k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда линейной оболочкой множества M является Ω — пространство многочленов любой степени.

Предложение 3.7. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Пусть $M = \{f_1, \ldots, f_p\} \subset E$. Тогда верно следующее*:

1) $\dim \mathcal{L}(M) \leqslant p$;

2) $\dim \mathcal{L}(M) = p$ *тогда и только тогда, когда набор* $\{f_1, \ldots, f_p\}$ *линейно независим.*

Доказательство. Построим базис в $\mathcal{L}(M)$. Пусть $f_1, \ldots, f_q$ — максимальный линейно независимый набор элементов из M. (За счет перенумерации элементов считаем, что это первые q элементов.) Тогда оставшиеся элементы $f_{q+1}, \ldots, f_p$ являются линейными комбинациями элементов $f_1, \ldots, f_q$:

$$f_k = \sum_{l=1}^{q} \beta_k^l f_l, \quad k = q+1, \ldots, p.$$

(Это проверяется обычным образом: набор $f_1, \ldots, f_q, f_k$ линейно зависим, следовательно, $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_q f_q + \alpha f_k = \mathbf{0}$, причем хотя бы один коэффициент здесь отличен от нуля. Тогда заведомо $\alpha \neq 0$, иначе набор $f_1, \ldots, f_q$ был бы линейно зависимым. Остается поделить равенство на α.)

Пусть $g \in \mathcal{L}(M)$. В силу предложения 3.6 элемент g является линейной комбинацией элементов из M, то есть,

$g = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k f_k$. Тогда

$$g = \sum_{l=1}^{q} \gamma_l f_l + \sum_{k=q+1}^{p} \gamma_k f_k =$$

$$= \sum_{l=1}^{q} \gamma_l f_l + \sum_{k=q+1}^{p} \gamma_k \sum_{l=1}^{q} \beta_k^l f_l = \sum_{l=1}^{q} \mu_l f_l,$$

где $\mu_l = \gamma_l + \sum_{k=q+1}^{p} \gamma_k \beta_k^l$. Мы показали, что любой элемент $g \in \mathcal{L}(M)$ можно разложить по линейно независимому набору $f_1, \dots, f_q$. Следовательно, этот набор образует базис в $\mathcal{L}(M)$.

Отсюда следует, что $\dim \mathcal{L}(M) = q \leqslant p$ и равенство $\dim \mathcal{L}(M) = p$ выполнено тогда и только тогда, когда набор $f_1, \dots, f_p$ линейно независим. $\square$

3.3. **Пересечения подпространств.**

Предложение 3.8. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Пусть F и G — два подпространства пространства E. Тогда пересечение $F \cap G$ является подпространством пространства E, причем*

$$\dim F \cap G \leqslant \min\{\dim F, \dim G\}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Проверим, что $F \cap G$ замкнуто относительно сложения и умножения на число.

Пусть $f, g \in F \cap G$. Поскольку $f, g \in F$, то $f + g \in F$. Поскольку $f, g \in G$, то $f + g \in G$. Следовательно, $f + g \in F \cap G$.

Пусть $f \in F \cap G$ и $\alpha \in K$. Поскольку $f \in F$, то $\alpha f \in F$. Поскольку $f \in G$, то $\alpha f \in G$. Следовательно, $\alpha f \in F \cap G$.

Таким образом, доказано, что $F \cap G$ является подпространством пространства E.

Вместе с тем $F \cap G$ можно рассматривать как подпространство пространства F, а потому

$$\dim F \cap G \leqslant \dim F.$$

Аналогично $F \cap G$ — это подпространство пространства G, а потому

$$\dim F \cap G \leqslant \dim G.$$

Таким образом, выполнено (3.2). $\square$

Примеры.

- В пространстве $E = M^2$ рассмотрим два трехмерных подпространства — подпространство симметричных матриц

$$F = \left\{ a = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \right\}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

и подпространство матриц с нулевым следом

$$G = \left\{ b = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & -\lambda \end{pmatrix} \right\}, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Пересечение $L = F \cap G$ — это двумерное подпространство

$$L = \left\{ a = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ \gamma & -\lambda \end{pmatrix} \right\}, \quad \lambda, \gamma \in \mathbb{R}.$$

- В пространстве $E = \mathbb{R}^3$ рассмотрим двумерные подпространства (плоскости)

$$F = \left\{ \vec{f} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad G = \left\{ \vec{g} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Пересечение $L = F \cap G$ — это прямая

$$L = \left\{ \vec{f} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Этот же пример показывает, что объединение $F \cup G$ в общем случае не является подпространством. Например, складывая вектор $\vec{e}_1$ из F и вектор $\vec{e}_3$ из G, получаем

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F \cup G.$$

3.4. **Линейные суммы подпространств.**

Определение 3.9. *Пусть F и G — подпространства пространства E. Линейной суммой F и G называется множество элементов вида $f+g$, где $f \in F$ и $g \in G$:*

$$F + G = \{x = f + g : \; f \in F, \; g \in G\}.$$

Предложение 3.10. *Пусть F и G — подпространства пространства E. Тогда линейная сумма $F+G$ является подпространством пространства E и совпадает с линейной оболочкой объединения:*

$$F + G = \mathcal{L}(F \cup G). \tag{3.3}$$

Доказательство. Проверим, что $F+G$ замкнуто относительно сложения и умножения на число.

Пусть $x_1, x_2 \in F+G$. Тогда $x_1 = f_1 + g_1$, $x_2 = f_2 + g_2$, где $f_1, f_2 \in F$ и $g_1, g_2 \in G$. Следовательно,

$$x_1 + x_2 = (f_1 + f_2) + (g_1 + g_2).$$

Поскольку $f_1 + f_2 \in F$, $g_1 + g_2 \in G$, то $f + g \in F + G$.

Пусть $x \in F+G$ и $\alpha \in K$. Тогда $x = f + g$, где $f \in F$ и $g \in G$. Имеем: $\alpha x = \alpha f + \alpha g$. Поскольку $\alpha f \in F$ и $\alpha g \in G$, то $\alpha x \in F + G$.

Таким образом, доказано, что $F+G$ является подпространством пространства E.

Теперь проверим (3.3). Очевидно, $F + G \subset \mathcal{L}(F \cup G)$, поскольку любой вектор вида $x = f + g$, где $f \in F$, $g \in G$, является линейной комбинацией двух векторов $f, g \in F \cup G$.

Обратно, пусть $x \in \mathcal{L}(F \cup G)$. Тогда x представим в виде конечной линейной комбинации векторов из $F \cup G$ (а каждый вектор из объединения принадлежит F либо G):

$$x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j + \sum_{k=1}^{q} \beta_k g_k, \quad f_1, \ldots, f_p \in F, \quad g_1, \ldots, g_q \in G.$$

Обозначая $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j = f \in F$, $\sum_{k=1}^{q} \beta_k g_k = g \in G$, получаем $x = f + g \in F + G$. Следовательно, $\mathcal{L}(F \cup G) \subset F + G$.

Из проверенных включений

$$F + G \subset \mathcal{L}(F \cup G), \quad \mathcal{L}(F \cup G) \subset F + G$$

вытекает равенство (3.3). □

Предложение 3.11. *Пусть F и G — подпространства пространства E. Представление любого вектора $x \in F+G$ в виде $x = f+g$, $f \in F$, $g \in G$, единственно тогда и только тогда, когда $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.*

Доказательство. Необходимость. Дано: для любого вектора $x \in F + G$ представление в виде $x = f + g$, $f \in F$, $g \in G$, единственно.

Предположим, что $F \cap G \neq \{\mathbf{0}\}$. Тогда найдется $x \neq \mathbf{0}$ и $x \in F \cap G$. Этот вектор можно представить в двух разных видах: $x = x + \mathbf{0}$, $x \in F$, $\mathbf{0} \in G$, и $x = \mathbf{0} + x$, $\mathbf{0} \in F$, $x \in G$. Полученное противоречие доказывает, что $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

Достаточность. Дано: $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

Пусть вектор $x \in F + G$ можно записать в виде $x = f + g$, $f \in F$, $g \in G$, а также в виде $x = \widetilde{f} + \widetilde{g}$, $\widetilde{f} \in F$, $\widetilde{g} \in G$. Тогда

$$f + g = \widetilde{f} + \widetilde{g} \;\Rightarrow\; f - \widetilde{f} = \widetilde{g} - g.$$

В последнем равенстве левая часть принадлежит F, а правая принадлежит G. Следовательно,

$$f - \widetilde{f} = \widetilde{g} - g \in F \cap G.$$

Поскольку $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$, то $f - \widetilde{f} = \widetilde{g} - g = \mathbf{0}$. Следовательно, $\widetilde{f} = f$ и $\widetilde{g} = g$, то есть, представление для x единственно. □

Определение 3.12. *Линейная сумма подпространств* $F+G$ *называется прямой суммой и обозначается* $F\dot{+}G$, *если для любого вектора* $x \in F+G$ *представление в виде* $x = f+g$, $f \in F$, $g \in G$, *единственно.*

Определение линейной суммы переносится на несколько слагаемых.

Определение 3.13. *Пусть* E *— линейное пространство над полем* K. *Пусть* $F_1, \ldots, F_p$ *— подпространства пространства* E. *Линейной суммой подпространств* $F_1, \ldots, F_p$ *называется множество*

$$F = F_1 + \cdots + F_p = \big\{x = f_1 + \cdots + f_p : \ f_j \in F_j, \ j = 1, \ldots, p\big\}.$$

Как и в случае двух слагаемых, легко убедиться, что линейная сумма $F = F_1 + \cdots + F_p$ — это подпространство пространства E.

Определение 3.14. *Линейная сумма* $F_1 + \cdots + F_p$ *называется прямой суммой и обозначается* $F_1 \dot{+} \cdots \dot{+} F_p$, *если для любого* $x \in F_1 + \cdots + F_p$ *представление в виде* $x = f_1 + \cdots + f_p$, $f_j \in F_j$, $j = 1, \ldots, p$, *единственно.*

Замечание. Предложение 3.11 буквально не переносится на случай нескольких слагаемых. Для того, чтобы сумма $F_1 + \cdots + F_p$ была прямой, необходимо и достаточно, чтобы пересечение каждого пространства F_j с суммой оставшихся было тривиальным, то есть

$$F_j \cap \Big(\sum_{k \neq j} F_k\Big) = \{\mathbf{0}\}, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Докажите это утверждение самостоятельно в качестве упражнения.

3.5. **Размерность линейной суммы.**

Теорема 3.15. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Пусть F и G — два конечномерных подпространства пространства E. Тогда*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G). \tag{3.4}$$

Доказательство. Обозначим

$$\dim F = p, \quad \dim G = q, \quad \dim(F \cap G) = r.$$

Выберем базис $\{h_1, \ldots, h_r\}$ в $H = F \cap G$. Так как H является подпространством пространства F, этот набор можно дополнить до базиса $\{h_1, \ldots, h_r; f_1, \ldots, f_{p-r}\}$ в F. Аналогично, H является подпространством пространства G, а потому этот набор можно дополнить до базиса $\{h_1, \ldots, h_r; g_1, \ldots, g_{q-r}\}$ в G.

Рассмотрим теперь набор

$$\{h_1, \ldots, h_r; f_1, \ldots, f_{p-r}; g_1, \ldots, g_{q-r}\} \subset F + G \tag{3.5}$$

и проверим, что этот набор образует базис в $F+G$. Отсюда будет следовать требуемое равенство

$$\dim(F+G) = r + (p-r) + (q-r) = p + q - r.$$

Сначала проверим, что набор (3.5) линейно независим. Предположим, что

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k h_k + \sum_{l=1}^{p-r} \beta_l f_l + \sum_{j=1}^{q-r} \gamma_j g_j = \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

Требуется показать, что все коэффициенты в этой линейной комбинации равны нулю. Обозначим

$$h = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k h_k \in F \cap G, \;\; f = \sum_{l=1}^{p-r} \beta_l f_l \in F, \;\; g = \sum_{j=1}^{q-r} \gamma_j g_j \in G.$$

Имеем: $g = -h - f$. Поскольку $g \in G$ и $-h - f \in F$, из этого равенства следует, что $g \in F \cap G$. Разложим g по базису $\{h_1, \dots, h_r\}$: $g = \sum_{k=1}^{r} \delta_k h_k$. В итоге получаем

$$\sum_{k=1}^{r} \delta_k h_k = -\sum_{k=1}^{r} \alpha_k h_k - \sum_{l=1}^{p-r} \beta_l f_l$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} (\delta_k + \alpha_k) h_k + \sum_{l=1}^{p-r} \beta_l f_l = \mathbf{0}.$$

Поскольку набор $\{h_1, \dots, h_r; f_1, \dots, f_{p-r}\}$ линейно независим (это базис в F), отсюда следует, что $\delta_k + \alpha_k = 0$ при $k = 1, \dots, r$ (впрочем, это нам не понадобится) и $\beta_l = 0$ при $l = 1, \dots, p - r$. С учетом $\beta_l = 0$ равенство (3.6) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k h_k + \sum_{j=1}^{q-r} \gamma_j g_j = \mathbf{0}.$$

Поскольку набор $\{h_1, \dots, h_r; g_1, \dots, g_{q-r}\}$ линейно независим (это базис в G), отсюда следует, что $\alpha_k = 0$ $(k = 1, \dots, r)$ и $\gamma_j = 0$ $(j = 1, \dots, q - r)$. Мы убедились, что набор (3.5) линейно независим.

Проверим теперь, что любой элемент $x \in F + G$ можно разложить по набору (3.5). Имеем $x = f + g$, где $f \in F$, $g \in G$. Разложим f по базису $\{h_1, \dots, h_r; f_1, \dots, f_{p-r}\}$ в F, а g разложим по базису $\{h_1, \dots, h_r; g_1, \dots, g_{q-r}\}$ в G:

$$f = \sum_{k=1}^{r} \xi_k h_k + \sum_{l=1}^{p-r} \eta_l f_l, \quad g = \sum_{k=1}^{r} \widetilde{\xi}_k h_k + \sum_{j=1}^{q-r} \zeta_j g_j.$$

Тогда

$$x = f + g = \sum_{k=1}^{r} (\xi_k + \widetilde{\xi}_k) h_k + \sum_{l=1}^{p-r} \eta_l f_l + \sum_{j=1}^{q-r} \zeta_j g_j.$$

Это и есть искомое разложение. Итак, мы доказали, что набор (3.5) образует базис в $F+G$. Как уже отмечалось, отсюда вытекает равенство (3.4). $\square$

Пример.

В пространстве $E=\mathbb{R}^3$ рассмотрим две плоскости

$$F=\left\{\vec{f}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{pmatrix}\right\},\quad G=\left\{\vec{g}=\begin{pmatrix}\gamma\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix}\right\},\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}.$$

Проверьте, что $F+G=\mathbb{R}^3$. Пересечение $F\cap G$ — это прямая

$$F\cap G=\left\{\vec{f}=\alpha\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\},\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

В данном примере имеем:

$$\dim F=\dim G=2,\quad \dim F\cap G=1,\quad \dim(F+G)=3.$$

Иллюстрация равенства (3.4): $3=2+2-1$.

Следствие 3.16. *Размерность прямой суммы конечномерных подпространств равна сумме их размерностей*:

$$\dim(F\dotplus G)=\dim F+\dim G. \tag{3.7}$$

Доказательство. В силу предложения 3.11, $F\cap G=\{\mathbf{0}\}$. Следовательно, $\dim(F\cap G)=0$. Тогда из (3.4) вытекает (3.7). $\square$

Замечание. Утверждение о размерности прямой суммы распространяется на случай нескольких слагаемых:

$$\dim(F_1\dotplus\cdots\dotplus F_p)=\sum_{j=1}^{p}\dim F_j.$$

3.6. **Прямое дополнение подпространства.**

Определение 3.17. *Пусть F — подпространство линейного пространства E. Подпространство G пространства E называется прямым дополнением подпространства F, если $F \dot{+} G = E$.*

Предложение 3.18. *Пусть E — конечномерное пространство над полем K. Пусть F — подпространство пространства E. Тогда существует прямое дополнение G подпространства F, так что $F \dot{+} G = E$.*

Доказательство. Обозначим $\dim E = n$, $\dim F = p$. Если F — несобственное подпространство пространства E, то утверждение очевидно: если $F = \{\mathbf{0}\}$, то $G = E$; если $F = E$, то $G = \{\mathbf{0}\}$.

Предположим теперь, что F — собственное подпространство пространства E. В этом случае $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Выберем базис $\{f_1, \ldots, f_p\}$ в подпространстве F. Дополним этот набор до базиса $\{f_1, \ldots, f_p; g_1, \ldots, g_{n-p}\}$ в E. Положим

$$G = \mathcal{L}\{g_1, \ldots, g_{n-p}\}.$$

Тогда G — подпространство пространства E, $\dim G = n - p$. Линейная сумма F и G совпадает с E: $F+G = E$, поскольку любой вектор $x \in E$ можно разложить по выбранному базису:

$$x = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k + \sum_{l=1}^{n-p} \beta_l g_l = f + g,$$

где $f = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k \in F$ и $g = \sum_{l=1}^{n-p} \beta_l g_l \in G$. Проверим, что $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$. Действительно, в силу теоремы 3.15

$$\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = p + (n-p) - n = 0.$$

Следовательно, сумма $F + G$ является прямой суммой, и $F \dot{+} G = E$. $\square$

Отметим, что в общем случае прямое дополнение подпространства не единственно.

Примеры.

- В пространстве $E = \mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное подпространство (прямую)

$$F = \left\{ \vec{f} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Подпространство

$$G = \left\{ \vec{g} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

является прямым дополнением подпространства F. Подпространство

$$\widetilde{G} = \left\{ \vec{h} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

также является прямым дополнением подпространства F. Опишите всевозможные прямые дополнения подпространства F.

- В пространстве $E = M^2$ рассмотрим трехмерное подпространство F матриц с нулевым следом

$$F = \left\{ a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \right\}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Проверьте, что одномерное подпространство G матриц, кратных единичной:

$$G = \left\{ a = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

является прямым дополнением подпространства F.

§ 4. Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах

4.1. Определение линейного оператора.

Определение 4.1. *Пусть E и F — два линейных пространства над полем K. Отображение $A : E \to F$ называется линейным отображением или линейным оператором, если*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad x, y \in E,\ \alpha, \beta \in K.$$

Для линейного оператора $A : E \to F$ выполнены свойства:

- $A\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_F$.

  Доказательство. Обозначим $f := A\mathbf{0}_E$. Напомним, что $0 \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$, где 0 — ноль в поле K. Тогда

  $$A\mathbf{0}_E = A(0 \cdot \mathbf{0}_E) = 0 \cdot f = \mathbf{0}_F.$$

  Мы воспользовались линейностью оператора A и свойством $0 \cdot f = \mathbf{0}_F$ в пространстве F. $\square$

- $A(-x) = -Ax$ для любого $x \in E$.

  Доказательство. Вспомним свойство $(-1) \cdot x = -x$ в пространстве E. Тогда

  $$A(-x) = A((-1) \cdot x) = (-1) \cdot Ax = -Ax.$$

  Мы воспользовались линейностью оператора A и свойством $(-1) \cdot f = -f$ в пространстве F. $\square$

Примеры.

- Рассмотрим оператор $A : E \to F$, переводящий любой вектор в ноль:

  $$Ax = \mathbf{0}_F \quad \forall x \in E.$$

  Этот оператор называется *нулевым оператором* и обозначается $\mathbf{0}_{E \to F}$.

- Рассмотрим оператор $A : E \to E$, переводящий любой вектор x в себя:
$$Ax = x, \quad x \in E.$$
Этот оператор называется *тождественным или единичным оператором* и обозначается $I = I_{E\to E}$.
- Пусть $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$. Предположим, что задана матрица $a \in M^{m,n}$ с вещественными элементами. Рассмотрим оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, переводящий вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ в вектор
$$A\vec{x} = a\vec{x} \in \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$
- Пусть $E = K^n$, $F = K^1$. Пусть оператор $A : K^n \to K^1$ переводит вектор $\vec{x} \in K^n$ в сумму его координат:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in K^n \ \mapsto \ A\vec{x} = \xi^1 + \cdots + \xi^n.$$
- Пусть $E = F = \Omega_n$. Рассмотрим оператор дифференцирования $D : \Omega_n \to \Omega_n$, сопоставляющий многочлену $P(t)$ его производную $P'(t)$: $DP = P'$.

  Заметим, что наряду с D можно рассмотреть оператор $\widetilde{D} : \Omega_n \to \Omega_{n-1}$, действующий на полиномы точно так же, как D, то есть $\widetilde{D}P = P'$. Это, однако, уже *другой* оператор, поскольку он действует в другой паре пространств.
- Пусть $E = M^{m,n}$, $F = M^{p,q}$. Пусть заданы фиксированные матрицы $b \in M^{p,m}$ и $a \in M^{n,q}$. Рассмотрим оператор $A : M^{m,n} \to M^{p,q}$, переводящий матрицу $x \in M^{m,n}$ в матрицу $bxa \in M^{p,q}$:
$$Ax = bxa, \quad x \in M^{m,n}.$$

Подчеркнем, что по существу линейный оператор — это *тройка* (пара пространств и само отображение, удовлетворяющее условиям из определения 4.1).

4.2. **Линейные действия над операторами. Пространство линейных операторов.** Пусть E и F — два линейных пространства над полем K. Обозначим через $\Lambda(E,F)$ множество всех линейных операторов из E в F. Введем на этом множестве действие сложения.

Определение 4.2. *Пусть $A, B \in \Lambda(E,F)$. Суммой операторов A и B называется отображение $C = A+B : E \to F$, действующее по правилу*

$$Cx = Ax + Bx, \quad x \in E.$$

Проверим, что $C = A + B$ — линейный оператор из E в F. При любых $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in K$ имеем

$$\begin{aligned} C(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha Ax + \beta Ay + \alpha Bx + \beta By \\ &= \alpha(Ax + Bx) + \beta(Ay + By) = \alpha Cx + \beta Cy. \end{aligned}$$

Мы воспользовались определением суммы операторов, линейностью операторов A и B, аксиомами в пространстве F и еще раз определением суммы операторов.

Проверьте самостоятельно, что сложение операторов коммутативно и ассоциативно. Это легко следует из коммутативности и ассоциативности сложения в F.

Нулевой оператор $\mathbf{0}_{E\to F}$ играет роль нейтрального элемента по сложению на множестве $\Lambda(E,F)$. Для каждого оператора $A \in \Lambda(E,F)$ существует противоположный оператор $-A \in \Lambda(E,F)$ такой, что $A + (-A) = \mathbf{0}_{E\to F}$. Он определяется по правилу $(-A)x = -Ax$, $x \in E$. Мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 4.3. *Множество $\Lambda(E,F)$ образует абелеву группу по сложению.*

Введем теперь операцию умножения оператора на число.

Определение 4.4. *Пусть $A \in \Lambda(E,F)$ и $\alpha \in K$. Произведением оператора A на число α называется отображение*

$D = \alpha A : E \to F$, *действующее по правилу*

$$Dx = \alpha(Ax), \quad x \in E.$$

Проверьте самостоятельно, что отображение $D = \alpha A$ является линейным оператором из E в F.

Справедливы свойства:

1) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ при любых $A \in \Lambda(E, F)$, $\alpha, \beta \in K$;
2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ при любых $A, B \in \Lambda(E, F)$, $\alpha \in K$;
3) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ при любых $A \in \Lambda(E, F)$, $\alpha, \beta \in K$;
4) $1 \cdot A = A$ при любом $A \in \Lambda(E, F)$.

Для примера проверим свойство 2: при любом $x \in E$ выполнено

$$(\alpha(A + B))x = \alpha(Ax + Bx) = \alpha Ax + \alpha Bx = (\alpha A + \alpha B)x.$$

Мы воспользовались определением сложения операторов и умножения оператора на число, аксиомой 2 в пространстве F и снова определением операций над операторами.

Проверьте самостоятельно оставшиеся три свойства. Мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.5. *Множество $\Lambda(E, F)$ образует линейное пространство над полем K.*

4.3. **Композиция операторов, ее свойства.**

Определение 4.6. *Пусть E, F, G — три линейных пространства над полем K. Пусть $A \in \Lambda(E, F)$, $B \in \Lambda(F, G)$. Композицией операторов B и A (или произведением B и A) называется отображение $Z = BA : E \to G$, действующее по правилу*

$$Zx = B(Ax), \quad x \in E.$$

Проверим, что $Z = BA$ — линейный оператор из E в G:

$$Z(\alpha x + \beta y) = B(A(\alpha x + \beta y)) = B(\alpha Ax + \beta Ay) =$$
$$= \alpha B(Ax) + \beta B(Ay) = \alpha Zx + \beta Zy, \quad x, y \in E, \ \alpha, \beta \in K.$$

Мы воспользовались определением композиции операторов, линейностью операторов A и B и снова определением композиции.

Свойства композиции:

- Дистрибутивность:

$$B(A_1+A_2) = BA_1 + BA_2 \quad \forall A_1, A_2 \in \Lambda(E,F),\ \forall B \in \Lambda(F,G);$$
$$(B_1+B_2)A = B_1A + B_2A \quad \forall A \in \Lambda(E,F),\ \forall B_1, B_2 \in \Lambda(F,G).$$

Доказательство. Для примера докажем первое соотношение:

$$\begin{aligned}(B(A_1 + A_2))x = B((A_1 + A_2)x) = B(A_1x + A_2x) = \\ = B(A_1x) + B(A_2x) = (BA_1)x + (BA_2)x = \\ = (BA_1 + BA_2)x, \quad x \in E.\end{aligned}$$

Мы воспользовались определением композиции операторов, затем определением суммы операторов, линейностью оператора B и снова определением композиции и суммы операторов. □

- Ассоциативность числового сомножителя:

$$B(\alpha A) = \alpha(BA) \quad \forall A \in \Lambda(E,F),\ \forall B \in \Lambda(F,G),\ \forall \alpha \in K;$$
$$(\alpha B)A = \alpha(BA) \quad \forall A \in \Lambda(E,F),\ \forall B \in \Lambda(F,G).$$

Проверьте самостоятельно.

- Ассоциативность произведения операторов: пусть E, F, G, H — линейные пространства над полем K. Тогда для любых операторов $A \in \Lambda(E,F)$, $B \in \Lambda(F,G)$, $C \in \Lambda(G,H)$ выполнено

$$C(BA) = (CB)A.$$

Проверьте самостоятельно.

Рассмотрим случай $F = E$. На множестве $\Lambda(E,E)$ заданы две бинарных операции — сложение и умножение (композиция). Мы знаем, что $\Lambda(E,E)$ образует абелеву группу по сложению и выполнен закон дистрибутивности. Мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.7. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Множество $\Lambda(E,E)$ с операциями сложения и умножения образует кольцо.*

Ясно, что $\Lambda(E,E)$ — кольцо с единицей. Роль единицы играет тождественный оператор $I = I_{E\to E}$. В общем случае это кольцо некоммутативное. (Исключением является случай одномерного E.)

§ 5. Матричное изображение линейных операторов

5.1. **Изображающие матрицы.** Пусть E, F — два конечномерных линейных пространства над полем K, $\dim E = n$, $\dim F = m$. Выберем базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в пространстве E и базис $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ в пространстве F. Рассмотрим изоморфизм $J_{\mathbf{e}} : E \to K^n$, определенный по правилу

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k \in E \ \mapsto \ J_{\mathbf{e}} x = \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in K^n.$$

Аналогично рассмотрим изоморфизм $J_{\mathbf{f}} : F \to K^m$, определенный по правилу

$$y = \sum_{l=1}^{m} \eta^l f_l \in F \ \mapsto \ J_{\mathbf{f}} y = \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^m \end{pmatrix} \in K^m.$$

Пусть задан оператор $A \in \Lambda(E,F)$. Наша цель — описать действие оператора A через связь между координатами вектора $x \in E$ и вектора $y = Ax \in F$. Применим оператор A к вектору $e_k \in E$ и разложим вектор $Ae_k \in F$ по базису $\mathbf{f}$:

$$Ae_k = \sum_{l=1}^{m} \alpha_k^l f_l, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5.1}$$

Составим матрицу $a \in M^{m,n}$:

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \dots & \alpha_n^m \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Определение 5.1. *Пусть E, F — два конечномерных линейных пространства над полем K, $\dim E = n$, $\dim F = m$. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в пространстве E и $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_m\}$ — базис в пространстве F. Пусть $A \in \Lambda(E, F)$. Матрица $a \in M^{m,n}$ вида (5.2), элементы которой определяются разложениями (5.1), называется изображающей матрицей оператора A в паре базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$.*

Опишем теперь, как действует оператор A на произвольный вектор $x \in E$. Разложим x по базису $\mathbf{e}$: $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$. Используя (5.1), получаем:

$$\begin{aligned} y = Ax = A\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k A e_k = \\ = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \Big(\sum_{l=1}^{m} \alpha_k^l f_l\Big) = \sum_{l=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^l \xi^k\Big) f_l = \sum_{l=1}^{m} \eta^l f_l, \end{aligned}$$

где

$$\eta^l = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^l \xi^k, \quad l = 1, \dots, m. \tag{5.3}$$

В матричном виде формулы (5.3) записываются в виде

$$\vec{y} = a\vec{x}. \tag{5.4}$$

Таким образом, равенство $y = Ax$ перешло в $\vec{y} = a\vec{x}$.

Рассмотрим оператор $\widehat{a} : K^n \to K^m$ — оператор умножения на матрицу a. Поскольку $\vec{x} = J_{\mathbf{e}} x$, $\vec{y} = J_{\mathbf{f}} y$ и $y = Ax$, равенство (5.4) принимает вид

$$J_{\mathbf{f}} A x = \widehat{a} J_{\mathbf{e}} x \ \ \forall x \in E \ \Leftrightarrow \ J_{\mathbf{f}} A = \widehat{a} J_{\mathbf{e}}.$$

Таким образом,

$$A = J_{\mathbf{f}}^{-1}\widehat{a}J_{\mathbf{e}}. \tag{5.5}$$

Полученный результат можно наглядно изобразить следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & F \\ J_{\mathbf{e}} \downarrow\uparrow J_{\mathbf{e}}^{-1} & & J_{\mathbf{f}}^{-1} \uparrow\downarrow J_{\mathbf{f}} \\ K^n & \xrightarrow{\widehat{a}} & K^m \end{array}$$

Если базисы фиксировать, то получается взаимно-однозначное соответствие между операторами и их изображающими матрицами.

Теорема 5.2. *Пусть E, F — два конечномерных линейных пространства над полем K, $\dim E = n$, $\dim F = m$. Тогда пространство линейных операторов $\Lambda(E, F)$ изоморфно пространству $M^{m,n}$ матриц с элементами из поля K.*

Доказательство. Фиксируем базис $\mathbf{e}$ в пространстве E и базис $\mathbf{f}$ в пространстве F. Рассмотрим отображение

$$\Phi : \Lambda(E, F) \to M^{m,n},$$

сопоставляющее оператору A его изображающую матрицу a в паре базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$: $\Phi A = a$. Мы уже проверили, что это отображение взаимно-однозначное: оператор A восстанавливается по матрице a с помощью равенства (5.5).

Проверим, что отображение Φ — линейное. Пусть $A, B \in \Lambda(E, F)$. Пусть $a = \{\alpha_k^l\}$, $b = \{\beta_k^l\}$ — их изображающие матрицы в паре базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$. По определению изображающих матриц это означает, что

$$Ae_k = \sum_{l=1}^{m} \alpha_k^l f_l, \quad Be_k = \sum_{l=1}^{m} \beta_k^l f_l, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Пусть $\gamma, \lambda \in K$. Тогда

$$(\gamma A + \lambda B)e_k = \gamma A e_k + \lambda B e_k =$$
$$= \gamma\Big(\sum_{l=1}^{m} \alpha_k^l f_l\Big) + \lambda\Big(\sum_{l=1}^{m} \beta_k^l f_l\Big) = \sum_{l=1}^{m}(\gamma\alpha_k^l + \lambda\beta_k^l) f_l,$$

$k = 1, \ldots, n$. Следовательно, изображающая матрица оператора $\gamma A + \lambda B$ в паре базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ — это матрица с элементами $\gamma\alpha_k^l + \lambda\beta_k^l$, то есть матрица $\gamma a + \lambda b$. Мы убедились, что отображение Φ линейное. $\square$

Поскольку размерности изоморфных пространств совпадают и $\dim M^{m,n} = mn$, мы приходим к следствию.

Следствие 5.3. *Размерность пространства $\Lambda(E, F)$ равна произведению размерностей пространств E и F:*

$$\dim \Lambda(E, F) = \dim E \cdot \dim F.$$

5.2. **Изображающая матрица композиции операторов.**

Теорема 5.4. *Пусть E, F, G — конечномерные линейные пространства над полем K, $\dim E = n$, $\dim F = m$, $\dim G = p$. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в E, $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ — базис в F, $\mathbf{g} = \{g_1, \ldots, g_p\}$ — базис в G. Пусть $A \in \Lambda(E, F)$ и $a \in M^{m,n}$ — изображающая матрица оператора A в паре базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$. Пусть $B \in \Lambda(F, G)$ и $b \in M^{p,m}$ — изображающая матрица оператора B в паре базисов $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$. Тогда изображающей матрицей композиции $BA \in \Lambda(E, G)$ в паре базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{g}$ является произведение матриц $ba \in M^{p,n}$.*

Доказательство. По определению изображающих матриц $a = \{\alpha_k^l\}$, $b = \{\beta_l^j\}$ имеем:

$$Ae_k = \sum_{l=1}^{m} \alpha_k^l f_l, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$Bf_l = \sum_{j=1}^{p} \beta_l^j g_j, \quad l = 1, \dots, m.$$

Следовательно,

$$BAe_k = B\Big(\sum_{l=1}^{m} \alpha_k^l f_l\Big) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_k^l B f_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \alpha_k^l \Big(\sum_{j=1}^{p} \beta_l^j g_j\Big) = \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{l=1}^{m} \beta_l^j \alpha_k^l\Big) g_j, \quad k = 1, \dots, n.$$

Таким образом,

$$BAe_k = \sum_{j=1}^{p} \gamma_k^j g_j, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\gamma_k^j = \sum_{l=1}^{m} \beta_l^j \alpha_k^l, \quad k = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, p.$$

Это означает, что изображающей матрицей оператора BA в паре базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{g}$ является матрица с элементами γ_k^j — это матрица ba. □

Теорема 5.5. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем K. Кольцо $\Lambda(E, E)$ линейных операторов в E изоморфно кольцу M^n квадратных матриц с элементами из поля K.*

Доказательство. Фиксируем базис $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ в E. Рассмотрим отображение $\Phi : \Lambda(E, E) \to M^n$, сопоставляющее оператору A его изображающую матрицу a в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{e}$. Это отображение взаимно-однозначное. Мы уже проверяли (см. доказательство теоремы 5.2), что сумме операторов отвечает сумма их изображающих матриц. Из теоремы 5.4 следует, что композиции операторов отвечает произведение их изображающих матриц. Поэтому отображение Φ устанавливает изоморфизм колец $\Lambda(E, E)$ и M^n. $\square$

Примеры.

- Пусть $n = \dim E$, $m = \dim F$. Рассмотрим нулевой оператор $\mathbf{0}_{E\to F}$. Его изображающая матрица в любой паре базисов — это нулевая матрица класса $M^{m,n}$.
- Пусть $n = \dim E$. Пусть $\mathbf{e}$ — какой-либо базис в E. Рассмотрим тождественный оператор $I : E \to E$. Его изображающая матрица в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{e}$ — это единичная матрица класса M^n.
- Пусть $E = \Omega_{n-1}$ — пространство многочленов степени не выше $n-1$. Тогда $\dim E = n$. Рассмотрим базис $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$, где

$$e_1(t) = 1, \;\; e_2(t) = t, \;\; e_3(t) = \frac{t^2}{2}, \; \dots, \; e_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (5.6)$$

Пусть $D : \Omega_{n-1} \to \Omega_{n-1}$ — оператор дифференцирования, сопоставляющий многочлену $P(t)$ его производную $P'(t)$: $DP = P'$. Найдем изображающую матрицу $d \in M^n$ оператора D в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{e}$. Имеем

$$De_1 = 0; \quad De_k = \frac{d}{dt}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} = e_{k-1}, \; k = 2, \dots, n.$$

Тогда матрица d имеет вид

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Рассмотрим оператор D^2 — оператор дифференцирования второго порядка: $D^2P = P''$. Имеем

$$D^2e_1 = 0, \quad D^2e_2 = 0; \quad D^2e_k = e_{k-2}, \quad k = 3, \ldots, n.$$

Изображающая матрица d^2 оператора D^2 в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{e}$ имеет вид

$$d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно рассмотреть степени D^k при $k = 1, \ldots, n-1$: при повышении степени в изображающей матрице d^k линия из единиц, параллельная главной диагонали, свигается к правому верхнему углу матрицы. Для D^{n-1} имеем:

$$D^{n-1}e_k = 0, \; k = 1, \ldots, n-1; \quad D^{n-1}e_n = e_1.$$

Следовательно,

$$d^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, $D^n = \mathbf{0}_{E \to E}$, поскольку производная n-го порядка от любого многочлена степени не выше $n-1$ равна нулю. Соответственно, d^n — нулевая матрица.

Оператор $A \in \Lambda(E, E)$, для которого некоторая его степень равна нулевому оператору, т. е. $A^m = \mathbf{0}_{E \to E}$, называют *нильпотентным*. Аналогично матрицу $a \in M^n$, некоторая степень которой равна нулевой матрице, называют *нильпотентной матрицей*.

Вывод: оператор дифференцирования D в пространстве Ω_{n-1} является нильпотентным оператором, а матрица d вида (5.7) — нильпотентная матрица.

§ 6. Образ и ядро линейного оператора. Типы линейных отображений

6.1. **Образ и ранг линейного оператора.** Пусть E и F — линейные пространства над полем K.

Определение 6.1. *Образом оператора $A \in \Lambda(E, F)$ называется множество*

$$\operatorname{Ran} A = \Big\{ y \in F : \text{ существует } x \in E \text{ такой, что } y = Ax \Big\}.$$

Предложение 6.2. *Образ оператора $A \in \Lambda(E, F)$ является подпространством пространства F.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{Ran} A$. Тогда существуют векторы $x_1, x_2 \in E$ такие, что $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Тогда

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

Следовательно, $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \operatorname{Ran} A$. □

Предложение 6.3. *Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем K. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в E. Тогда образ оператора $A \in \Lambda(E, F)$ является линейной оболочкой множества векторов $Ae_1, \dots, Ae_n$:*

$$\operatorname{Ran} A = \mathcal{L}(\{Ae_1, \dots, Ae_n\}). \tag{6.1}$$

Доказательство. Очевидно, $Ae_k \in \operatorname{Ran} A$, $k = 1, \dots, n$. Поскольку $\operatorname{Ran} A$ — подпространство, то любая линейная комбинация векторов $Ae_1, \dots, Ae_n$ также принадлежит $\operatorname{Ran} A$. То есть,

$$\mathcal{L}(\{Ae_1, \dots, Ae_n\}) \subset \operatorname{Ran} A. \tag{6.2}$$

Обратно, пусть $y \in \operatorname{Ran} A$. Тогда существует $x \in E$ такой, что $y = Ax$. Разложим x по базису $\mathbf{e}$: $x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k$. Тогда

$$y = Ax = \sum_{k=1}^{n} \xi^k A e_k.$$

Следовательно, $y \in \mathcal{L}(\{Ae_1, \ldots, Ae_n\})$. Таким образом,

$$\operatorname{Ran} A \subset \mathcal{L}(\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}). \tag{6.3}$$

Из (6.2) и (6.3) следует (6.1). $\square$

Определение 6.4. *Рангом линейного оператора $A \in \Lambda(E, F)$ называется число, равное размерности его образа*:

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Ran} A.$$

Предложение 6.5. *Пусть E, F — конечномерные линейные пространства над полем K. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в E, $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ — базис в F. Пусть $A \in \Lambda(E, F)$ и $a \in M^{m,n}$ — изображающая матрица оператора A в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{f}$. Тогда ранг оператора A совпадает с рангом матрицы a*:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} a.$$

Доказательство. В силу (6.1) ранг оператора A равен максимальному числу линейно независимых векторов среди $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$. По определению изображающей матрицы, ее столбцы $\vec{a}_k$ — это координаты вектора Ae_k в базисе $\mathbf{f}$, то есть, $\vec{a}_k = J_{\mathbf{f}} A e_k$, $k = 1, \ldots, n$. Изоморфизм $J_{\mathbf{f}}$ не меняет числа линейно независимых векторов. Поэтому число линейно независимых столбцов матрицы a равно числу линейно независимых векторов среди $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$. Тем самым $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} a$. $\square$

Поскольку $\operatorname{rank} a \leqslant \min\{n, m\}$, приходим к следствию.

Следствие 6.6. *Для $A \in \Lambda(E, F)$ выполнено*

$$\operatorname{rank} A \leqslant \min\{\dim E, \dim F\}.$$

Пример.

- Пусть $E = \Omega_{n-1}$ — пространство многочленов степени не выше $n-1$. Тогда $\dim E = n$. Образ оператора дифференцирования $D : \Omega_{n-1} \to \Omega_{n-1}$, сопоставляющего многочлену его производную $DP = P'$, равен Ω_{n-2}:

$$\operatorname{Ran} D = \Omega_{n-2}.$$

Действительно, производная от многочлена степени не выше $n-1$ есть многочлен степени не выше $n-2$. С другой стороны, по любому многочлену $Q \in \Omega_{n-2}$ с помощью интегрирования можно восстановить многочлен $P \in \Omega_{n-1}$ такой, что $P'(t) = Q(t)$: $P(t) = \int_0^t Q(\tau)\, d\tau$. Имеем $\operatorname{rank} D = n-1$. Рассмотрим базис (5.6) в Ω_{n-1}. В паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{e}$ изображающая матрица $d \in M^n$ оператора D имеет вид (5.7). Очевидно, $\operatorname{rank} d = n-1$.

Предложение 6.7. *Пусть $E, F, \widetilde{E}, \widetilde{F}$ — конечномерные линейные пространства над полем K.*
1°. *Пусть $A \in \Lambda(E, F)$ и пусть $J_1 : \widetilde{E} \to E$ — изоморфизм. Пусть $B = AJ_1 \in \Lambda(\widetilde{E}, F)$. Тогда* $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A$.
2°. *Пусть $A \in \Lambda(E, F)$ и пусть $J_2 : F \to \widetilde{F}$ — изоморфизм. Пусть $C = J_2 A \in \Lambda(E, \widetilde{F})$. Тогда* $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} A$.

Доказательство. 1°. Выберем базис $\widetilde{\mathbf{e}} = \{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n\}$ в $\widetilde{E}$. Обозначим $e_k = J_1 \widetilde{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда по свойству изоморфизма $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в E. Имеем:

$$B\widetilde{e}_k = AJ_1\widetilde{e}_k = Ae_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, в силу предложения 6.3

$$\operatorname{Ran} B = \mathcal{L}(\{B\widetilde{e}_1, \ldots, B\widetilde{e}_n\}) = \mathcal{L}(\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}) = \operatorname{Ran} A.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A$.

2°. Выберем базис $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ в E. В силу предложения 6.3

$$\begin{aligned} \operatorname{Ran} A &= \mathcal{L}(\{Ae_1, \dots, Ae_n\}), \\ \operatorname{Ran} C &= \mathcal{L}(\{J_2Ae_1, \dots, J_2Ae_n\}). \end{aligned}$$

По свойству изоморфизма число линейно независимых векторов среди $J_2Ae_1, \dots, J_2Ae_n$ равно числу линейно независимых векторов среди $Ae_1, \dots, Ae_n$. Поэтому $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} A$. $\square$

6.2. **Ядро линейного оператора.**

Определение 6.8. *Ядром оператора $A \in \Lambda(E, F)$ называется множество*

$$\operatorname{Ker} A = \{z \in E : \ Az = \mathbf{0}_F\}.$$

Предложение 6.9. *Пусть $A \in \Lambda(E, F)$. Ядро $\operatorname{Ker} A$ является подпространством пространства E.*

Доказательство. Пусть $z_1, z_2 \in \operatorname{Ker} A$. Это означает, что $Az_1 = \mathbf{0}_F$, $Az_2 = \mathbf{0}_F$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Тогда

$$A(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 Az_1 + \alpha_2 Az_2 = \mathbf{0}_F.$$

Следовательно, $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in \operatorname{Ker} A$. $\square$

Теорема 6.10. *Пусть E, F — конечномерные линейные пространства над полем K. Пусть $A \in \Lambda(E, F)$. Тогда*

$$\dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rank} A = \dim E. \tag{6.4}$$

Доказательство. Обозначим $\dim E = n$ и $\dim F = m$. Выберем базисы $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ в E и $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_m\}$ в F. Рассмотрим изоморфизмы $J_{\mathbf{e}} : E \to K^n$ и $J_{\mathbf{f}} : F \to K^m$; см. пункт 5.1. Пусть $a \in M^{m,n}$ — изображающая матрица оператора A в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{f}$. Тогда

$$A = J_{\mathbf{f}}^{-1} \widehat{a} J_{\mathbf{e}},$$

где $\widehat{a} : K^n \to K^m$ — оператор умножения на матрицу a. Обозначим $r = \operatorname{rank} A$. В силу предложения 6.5 $r = \operatorname{rank} a$.

Убедимся теперь, что

$$\operatorname{Ker} A = J_{\mathbf{e}}^{-1} \operatorname{Ker} \widehat{a} = \{z \in E : \ \vec{z} = J_{\mathbf{e}} z \in \operatorname{Ker} \widehat{a}\}.$$

Имеем:

$$z \in \operatorname{Ker} A \ \Leftrightarrow \ Az = \mathbf{0}_F \ \Leftrightarrow \ J_{\mathbf{f}}^{-1} \widehat{a} J_{\mathbf{e}} z = \mathbf{0}_F$$
$$\Leftrightarrow \ \widehat{a}\vec{z} = \mathbf{0}_{K^m} \ \Leftrightarrow \ \vec{z} \in \operatorname{Ker} \widehat{a}.$$

Изоморфизм не меняет размерности, поэтому

$$\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} \widehat{a}. \tag{6.5}$$

Ядро $\operatorname{Ker} \widehat{a}$ — это пространство решений однородной системы линейных алгебраических уравнений $a\vec{z} = \mathbf{0}$. Из теории систем линейных алгебраических уравнений мы знаем, что количество линейно независимых решений равно $n - r$; см. гл. 2, §3 в пособии [2] (там рассматривались системы с комплексными коэффициентами, т. е. случай $K = \mathbb{C}$, но аналогичные рассуждения проходят и в случае систем линейных алгебраических уравнений с коэффициентами из любого поля K). Следовательно,

$$\dim \operatorname{Ker} \widehat{a} = n - r.$$

Отсюда с учетом равенства $r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} a$ и (6.5), получаем (6.4). □

Пример.

- Пусть $E = \Omega_{n-1}$ — пространство многочленов степени не выше $n - 1$. Тогда $\dim E = n$. Ядро оператора $D : \Omega_{n-1} \to \Omega_{n-1}$, сопоставляющего многочлену его производную $DP = P'$, состоит из постоянных функций (то есть многочленов степени 0):

  $$\operatorname{Ker} D = \Omega_0.$$

  Поэтому $\dim \operatorname{Ker} D = 1$. Вспомним, что $\operatorname{rank} D = n - 1$. В сумме получаем n.

6.3. **Обратный оператор. Типы линейных отображений.** Пусть E, F — конечномерные линейные пространства над полем K. Пусть $A \in \Lambda(E, F)$. Рассмотрим уравнение

$$Ax = f, \tag{6.6}$$

где вектор $f \in F$ задан, а $x \in E$ — неизвестное.

Обсудим вопросы о существовании и единственности решения уравнения (6.6). Из определений образа и ранга оператора A прямо вытекают ответы на вопросы о существовании решения.

1. *При данном $f \in F$ решение существует тогда и только тогда, когда $f \in \operatorname{Ran} A$.*

2. *Решение существует при любом $f \in F$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ran} A = F$, что равносильно равенству $\operatorname{rank} A = \dim F$.*

За вопрос о единственности ответственно ядро оператора.

Предложение 6.11. *Имеет место единственность решения (то есть: если при каком-либо $f \in F$ решение существует, то оно единственно) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$.*

Доказательство. Необходимость. Дано: имеет место единственность.

Мы знаем, что уравнение $Az = \mathbf{0}_F$ заведомо имеет тривиальное решение $z = \mathbf{0}_E$. Это решение единственно. Следовательно, $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$.

Достаточность. Дано: $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$.

Пусть для какого-либо $f \in F$ существуют решения $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$. То есть выполнены равенства $Ax_1 = f$, $Ax_2 = f$. Следовательно, $Ax_1 = Ax_2$, а тогда $A(x_1 - x_2) = \mathbf{0}_F$. Это означает, что $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} A$. Поскольку $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$, то $x_1 = x_2$. $\square$

Определение 6.12. *Пусть* $A \in \Lambda(E,F)$. *Оператор* $B \in \Lambda(F,E)$ *называется левым обратным к оператору* A, *если* $BA = I_{E\to E}$.

Определение 6.13. *Пусть* $A \in \Lambda(E,F)$. *Оператор* $C \in \Lambda(F,E)$ *называется правым обратным к оператору* A, *если* $AC = I_{F\to F}$.

Определение 6.14. *Пусть* $A \in \Lambda(E,F)$. *Оператор* $D \in \Lambda(F,E)$ *называется обратным к оператору* A, *если он одновременно является левым и правым обратным к* A, *то есть* $BA = I_{E\to E}$ *и* $AC = I_{F\to F}$.

Предложение 6.15. 1°. *Если у оператора* $A \in \Lambda(E,F)$ *существует левый обратный оператор* $B \in \Lambda(F,E)$, *то* $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$, *что равносильно* $\operatorname{rank} A = \dim E$.
2°. *Если у оператора* $A \in \Lambda(E,F)$ *существует правый обратный оператор* $C \in \Lambda(F,E)$, *то* $\operatorname{Ran} A = F$, *что равносильно* $\operatorname{rank} A = \dim F$.

Доказательство. 1°. Дано: существует левый обратный оператор $B \in \Lambda(F,E)$ такой, что $BA = I_{E\to E}$.

Пусть $z \in \operatorname{Ker} A$, то есть, $Az = \mathbf{0}_F$. С учетом $BA = I_{E\to E}$ получаем

$$z = BAz = B\mathbf{0}_F = \mathbf{0}_E.$$

Следовательно, $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$.

Равносильность условий $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$ и $\operatorname{rank} A = \dim E$ следует из тождества (6.4):

$$\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\} \;\Leftrightarrow\; \dim \operatorname{Ker} A = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rank} A = \dim E.$$

2°. Дано: существует правый обратный оператор $C \in \Lambda(F,E)$ такой, что $AC = I_{F\to F}$.

Тогда для любого $f \in F$ вектор $x = Cf \in E$ является решением уравнения $Ax = f$, так как $Ax = ACf = f$. Следовательно, $\operatorname{Ran} A = F$, что равносильно $\operatorname{rank} A = \dim F$. $\square$

Предложение 6.16. *Пусть у оператора* $A \in \Lambda(E, F)$ *существует левый обратный оператор* $B \in \Lambda(F, E)$ *и существует правый обратный оператор* $C \in \Lambda(F, E)$*. Тогда* 1) $\dim E = \dim F$ *и* 2) $B = C$.

Доказательство. В силу предложения 6.15(1°) из существования левого обратного оператора следует, что $\operatorname{rank} A = \dim E$. В силу предложения 6.15(2°) из существования правого обратного оператора следует, что $\operatorname{rank} A = \dim F$. Следовательно, $\dim E = \dim F$.

Поскольку $AC = I_{F\to F}$ и $BA = I_{E\to E}$, имеем:

$$B = B(AC) = (BA)C = C.$$

□

Следствие 6.17. 1) *Если у оператора* $A \in \Lambda(E, F)$ *существует левый обратный* B *и существует правый обратный* C*, то существует обратный оператор* D *и он единственен. Обратный оператор обозначается* $D = A^{-1}$.

2) *Для существования обратного оператора* A^{-1} *необходимо, чтобы* $\dim E = \dim F$.

3) *Если существует* A^{-1}*, то уравнение* $Ax = f$ *имеет единственное решение при любом* $f \in F$*. Это решение дается формулой* $x = A^{-1}f$.

Предложение 6.18. *Пусть* $\dim E = \dim F = n$*. Пусть* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— базис в* E*,* $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ *— базис в* F*. Пусть* $A \in \Lambda(E, F)$ *и* $a \in M^n$ *— изображающая матрица оператора* A *в паре базисов* $\mathbf{e}, \mathbf{f}$*. Тогда существование обратного оператора* A^{-1} *равносильно тому, что матрица* a *неособая. При этом изображающей матрицей оператора* A^{-1} *в паре базисов* $\mathbf{f}, \mathbf{e}$ *является матрица* a^{-1}.

Доказательство. Необходимость. Дано: существует A^{-1}. В силу предложения 6.15 имеем $\operatorname{rank} A = n$. Поскольку ранг изображающей матрицы совпадает с рангом оператора, то $\operatorname{rank} a = n$. Это равносильно условию $\det a \neq 0$.

Достаточность. Дано: $\det a \neq 0$.

Тогда существует обратная матрица $a^{-1} \in M^n$. Пусть $\widehat{a^{-1}} : K^n \to K^n$ — оператор умножения на матрицу a^{-1}. Рассмотрим оператор $D \in \Lambda(F, E)$, изображающая матрица которого в паре базисов $\mathbf{f}, \mathbf{e}$ есть a^{-1}:

$$D = J_{\mathbf{e}}^{-1} \widehat{a^{-1}} J_{\mathbf{f}}.$$

Проверим, что оператор D является обратным к A. Поскольку $A = J_{\mathbf{f}}^{-1} \widehat{a} J_{\mathbf{e}}$, то

$$\begin{aligned} DA &= (J_{\mathbf{e}}^{-1} \widehat{a^{-1}} J_{\mathbf{f}})(J_{\mathbf{f}}^{-1} \widehat{a} J_{\mathbf{e}}) = J_{\mathbf{e}}^{-1} \widehat{a^{-1}} (J_{\mathbf{f}} J_{\mathbf{f}}^{-1}) \widehat{a} J_{\mathbf{e}} \\ &= J_{\mathbf{e}}^{-1} (\widehat{a^{-1}} \widehat{a}) J_{\mathbf{e}} = J_{\mathbf{e}}^{-1} J_{\mathbf{e}} = I_{E \to E}. \end{aligned}$$

Следовательно, D — левый обратный к оператору A. Аналогично проверяется, что D — правый обратный к A. $\square$

Теорема 6.19. *Пусть E, F — конечномерные линейные пространства над полем K, $\dim E = \dim F = n$. Пусть $A \in \Lambda(E, F)$. Тогда следующие свойства равносильны*:

1) *существует левый обратный оператор B*;
2) *существует правый обратный оператор C*;
3) *существует обратный оператор A^{-1}*;
4) *выполнено* $\operatorname{rank} A = n$;
5) *выполнено* $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$;
6) *изображающая матрица a оператора A (в какой-либо паре базисов) — неособая.*

Доказательство. Из 3) следует 1) — очевидно.

Из 3) следует 2) — очевидно.

Из 1) следует 5) в силу предложения 6.15(1°).

Из 2) следует 4) в силу предложения 6.15(2°).

3) равносильно 6) в силу предложения 6.18.

4) равносильно 5) в силу тождества (6.4).

4) равносильно 6), поскольку 4) означает, что $\operatorname{rank} a = \operatorname{rank} A = n$, а это равносильно тому, что матрица a — неособая. $\square$

Подытожим результаты в виде таблицы, в которой выделены типы линейных отображений, обладающих “хорошими” свойствами.

Типы линейных отображений

$$Ax = f, \quad A : E \to F.$$

факт	$\forall f \in F$ $\exists$ решение	если $\exists$ решение, то оно единственно	$\exists$ единственное решение $\forall f \in F$
критерий	$\operatorname{Ran} A = F$ $\Updownarrow$ $\operatorname{rank} A = \dim F$	$\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$ $\Updownarrow$ $\operatorname{rank} A = \dim E$	$\operatorname{Ran} A = F$ и $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$ $\Updownarrow$ $\operatorname{rank} A = \dim E = \dim F$
необходимое условие	$\dim F \leqslant \dim E$	$\dim E \leqslant \dim F$	$\dim E = \dim F$
термин	отображение на сюръекция эпиморфизм	обратимое отображение инъекция мономорфизм	взаимно-однозначное отображение биекция изоморфизм

В случае $E = F$ изоморфизм часто называют *автоморфизмом.*

Извлечем следствия.

Альтернатива Фредгольма. *Пусть* $\dim E = \dim F = n$. *Пусть* $A \in \Lambda(E, F)$. *Тогда имеет место альтернатива*: *либо существует решение уравнения* $Ax = f$ *при любом* $f \in F$, *либо существует нетривиальное решение однородного уравнения* $Az = \mathbf{0}_F$.

Доказательство. Очевидно, имеет место альтернатива: либо $\operatorname{rank} A = n$, либо $\operatorname{rank} A < n$. Первое равенство равносильно существованию решения при любой правой части (см. первую колонку в таблице). Второе соотношение равносильно тому, что $\operatorname{Ker} A \neq \{\mathbf{0}_E\}$ (в силу тождества (6.4)), что в свою очередь означает существование нетривиального решения однородного уравнения $Az = \mathbf{0}_F$. $\square$

Следствие 6.20. *Пусть* $\dim E = \dim F = n$. *Оператор* $A \in \Lambda(E, F)$ *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$.

Доказательство. Соотношение $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_E\}$ равносильно тому, что $\operatorname{rank} A = n$ (в силу тождества (6.4)). А это равносильно тому, что оператор A — изоморфизм (здесь важно, что размерности пространств E и F совпадают). См. последнюю колонку в таблице. $\square$

Мы часто будем использовать достаточность: при условии $\dim E = \dim F$, для того, чтобы убедиться, что некоторый оператор $A : E \to F$ является изоморфизмом, достаточно проверить тривиальность его ядра.

Список литературы

[1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Линейная алгебра, выпуск* 1. *Матрицы. Определители.* Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 1999. – 41 с.

[2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., Фаддеев М. М., *Линейная алгебра, выпуск* 2. *Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений.* Учебно-методическое пособие. — СПб.: СПбГУ, 1999. – 49 с.

[3] Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*, издание пятое. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. — 320 с.

[4] Кострикин А. И., *Введение в алгебру. Часть 2: Линейная алгебра.* — М.: Физматлит, 2004. — 368 с.

[5] Халмош П. Р., *Конечномерные векторные пространства.* — М.: Физматгиз, 1963. – 264 с.

[6] Кострикин А. И., Манин Ю. И., *Линейная алгебра и геометрия.* — М.: Наука, 1986. – 304 с.

[7] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, издание четвертое. — М.: Наука, 1980. – 572 с.